



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI FISICA

Laurea Magistrale in FISICA
Curriculum FISICA TEORICA

LOCALIZZAZIONE A MOLTI CORPI IN UNA CATENA DI BOSONI FORTEMENTE INTERAGENTI

Tesi Magistrale
Glen Bigan Mbeng

Relatori:

Prof. Rosario Fazio

Dott. Davide Rossini

Autore:

Glen Bigan Mbeng

Sessione di Laurea del 19 Ottobre 2015
Anno Accademico 2014/2015

Sommario

In presenza di disordine statico, gli autostati di una singola particella possono diventare localizzati (la funzione d'onda va a zero esponenzialmente su una scala che viene comunemente indicata come lunghezza di localizzazione). Questo fenomeno, che prende il nome di *localizzazione di Anderson*, è stato studiato in modo intenso sia teoricamente che sperimentalmente fin dalla sua scoperta nel 1958, ormai più di 50 fa. Mentre la comprensione della localizzazione di particelle non-interagente è ben assodata, la situazione in presenza di interazioni non è altrettanto chiara perché i processi di scattering tra particelle competono con il disordine tendendo quindi a delocalizzare le particelle.

Il problema della localizzazione in sistemi a molti-corpi negli ultimi anni ha vissuto una riaccensione dell'interesse da parte di numerosi studiosi. Studi teorici e numerici suggeriscono che, anche in presenza di interazioni, se il sistema è sufficientemente disordinato la localizzazione può persistere per tutti gli stati che compongono lo spettro. Mentre all'aumentare della costante di accoppiamento associata alle interazioni, il sistema delocalizza. Al variare delle varie costanti di accoppiamento è quindi possibile che il sistema passi da una fase localizzata ad una delocalizzata subendo quella che viene chiamata transizione localizzazione/delocalizzazione a molti corpi o equivalentemente transizione *Many Body Localized/Delocalized* (MBLD).

La studio della transizione MBLD riveste un ruolo di grande importanza in quanto alla base dei fondamenti stessi della meccanica statistica quantistica. Infatti nella fase delocalizzata la dinamica del sistema lo porta ad uno stato di equilibrio termico descrivibile con la meccanica statistica (ovvero il sistema è *ergodico*), mentre nella fase *Many Body Localized* (MBL), poiché il sistema possiede un numero infinito di osservabili locali conservate, non è in grado di raggiungere uno stato di equilibrio termico (il sistema è *non ergodico*).

I sistemi MBL sono stabili e ammettono una descrizione universale in termini delle loro quantità locali conservate. In particolare si crede che la fase MBL, in virtù della sua universalità, esista sia per fermioni che per bosoni. Nonostante l'esistenza di lavori analitici a supporto della localizzazione in sistemi bosonici, per ragioni computazionali i lavori numerici sulla MBL sono stati fatti finora solo su modelli fermionici o di spin-1/2.

Lo scopo principale di questa tesi è di presentare un primo studio della *Many Body Localization* in un modello di bosoni su un reticolo unidimensionale, il modello di Bose-Hubbard. Questo studio diventa particolarmente rilevante poiché i sistemi sperimentali ad alta controllabilità (gas ultrafreddi di bosoni in presenza di un reticolo ottico), in cui è possibile l'osservazione della localizzazione a molti corpi, sono descritti da questo modello.

La tesi è suddivisa in tre parti.

Nella prima parte introduciamo il problema della *Many Body Localization* e ne descriviamo le proprietà.

Nella seconda parte introduciamo e giustifichiamo il modello in cui abbiamo deciso di studiare la MBL, descriviamo il metodo numerico utilizzato e ne presentiamo i risultati, che confermano l'esistenza di una transizione MBLD per il modello.

In fine nella terza parte presentiamo uno studio numerico quantitativo della transizione MBLD ottenuto utilizzando un'analisi di *finite size scaling* applicata all'entropia di bipartizione del sistema.

I risultati originali ottenuti in questo lavoro di tesi sono contenuti nel Capitolo [3](#)

Indice

Sommario	i
Indice	iii
Abbreviazioni	v
Costanti Fisiche	vi
1 Introduzione	1
2 Localizzazione a molti corpi in sistemi disordinati	18
2.1 Interazione con i fononi	20
2.2 Localizzazione nello spazio di Hilbert per Fermioni e Mobility Edge del sistema a molti corpi	22
2.3 Osservazioni sperimentali della MBL	26
2.4 Proprietà dei sistemi MBL	29
2.4.1 Integrali del moto locali nella fase MBL	32
3 Localizzazione a molti corpi in una catena di Bosoni	37
3.1 Il modello Bose Hubbard per atomi freddi - reticolo ottico	38
3.2 Statistica dei Livelli	44
3.3 Entropia di entanglement	51
3.4 Diagramma di fase	56
4 Conclusioni	69
A Statistica dei livelli Poissoniana e GOE	71
B Entropia di entanglement: legge del volume e legge dell'area	76
B.1 Entropia degli autostati	80
C Informazione e coerenza nei sistemi FMBL	84
D Calcolo della distribuzione di r	86
E Grafici aggiuntivi relativi allo scaling collapse	88

Bibliografia	93
Ringraziamenti	98

Abbreviazioni

LT	L imite T ermodinamico
MBL	M any B ody L ocalized
FMBL	F ull M any B ody L ocalized
MBLD	M any B ody L ocalized/ D elocalized
ETH	E eigenstate T hermalization H ypothesis
DC	D irect C urrent
GOE	G aussian O rthogonal E nsemble
RMT	R andom M atrix T heory
GS	G round S tate
RG	R enormalization G roup
DMRG	D ensity M atrix R renormalization G roup
tDMRG	t ime dependent D ensity M atrix R renormalization G roup

Costanti Fisiche

Costante Boltzmann	k_B	$=$	$1.38065 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2}\text{kg s}^{-2}\text{K}^{-1}$
Costante Planck	\hbar	$=$	$6.62607004 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg s}^{-1}$
Carica dell'elettrone (modulo)	e	$=$	$1.60217656 \times 10^{-19}\text{C}$

Capitolo 1

Introduzione

Trattare esattamente l'evoluzione quantistica di un generico sistema con molti gradi di libertà risulta di fatto impossibile, per la difficoltà insormontabile nel risolvere le equazioni del moto. Contemporaneamente, oltre che impossibile da ottenere, la soluzione completa delle equazioni del moto è inutile a fini pratici. Infatti le quantità d'interesse sono quelle macroscopiche, che descrivono il comportamento collettivo del sistema. Per descrivere il sistema, è quindi naturale e inevitabile rinunciare ai dettagli microscopici e passare ad una trattazione macroscopica. La meccanica statistica è il formalismo che ci permette di descrivere a livello macroscopico le proprietà della materia, partendo dalla dinamica dei gradi di libertà microscopici. Poiché il formalismo è molto generale, questo è stato applicato con successo a sistemi di vario genere (solidi, liquidi, gassosi, biologici, quantistici, classici etc..) e si è rivelato adatto a investigare sia le proprietà di equilibrio che quelle di non equilibrio [1][2]. Nonostante il suo successo nel descrivere i sistemi in equilibrio, alcuni aspetti fondamentali teorici della meccanica statistica di equilibrio richiedono a tutt'oggi un'ulteriore analisi. In particolare, una derivazione della meccanica statistica, che parta solo dalle equazioni del moto che regolano la dinamica microscopica, ad oggi non esiste. La meccanica statistica si basa sul concetto degli “ensemble” statistici, che consistono in un insieme di “copie” del sistema di interesse, solitamente tutte sottoposte agli stessi vincoli fisici (ma diversi tra loro a livello microscopico). Più precisamente, nella trattazione matematica, avere un ensemble statistico equivale ad avere una misura o distribuzione di probabilità sullo spazio delle configurazioni del sistema che permette di calcolare le medie delle varie quantità fisiche osservabili. L'assunzione alla base della meccanica statistica è che le proprietà macroscopiche del sistema di interesse

possano essere descritte utilizzando un appropriato ensemble statistico. L'ensemble che descrive i sistemi che non interagiscono con l'ambiente esterno (sistemi isolati) è detto microcanonico, mentre quello che descrive i sistemi non isolati è detto canonico. L'uso di questi ensemble statistici fu introdotto da Boltzmann e Maxwell più di 100 anni fa [3][4], ma non ha ancora una rigorosa giustificazione matematica.

La meccanica statistica permette di calcolare tutte le quantità fisiche del sistema tramite le medie su ensemble, senza dover conoscere le condizioni iniziali del sistema. In teoria i risultati della meccanica statistica andrebbero quindi confrontati con misure sperimentali fatte sui vari sistemi che compongono l'ensemble. Spesso negli esperimenti reali non è possibile effettuare queste medie, ed il sistema di interesse è uno solo. Nonostante i risultati di questi esperimenti e le previsioni della meccanica statistica non dovrebbero coincidere, in pratica il formalismo della meccanica statistica dà risultati attendibili anche in queste situazioni. Sorge quindi spontanea la domanda di come sia possibile giustificare l'uso degli ensemble statistici per descrivere le proprietà di un unico sistema (problema degli ensemble). Poiché un qualsiasi sistema isolato è descritto interamente dalle equazioni del moto microscopiche (classiche o quantistiche), il setting naturale per studiare il problema è quello dei sistemi isolati (ensemble microcanonico). In questa trattazione l'eventuale ambiente in cui si trova il sistema di interesse va incluso come parte del sistema stesso. Spesso l'ambiente è molto più grande del sistema di interesse e gioca un ruolo fondamentale nella dinamica, rendendo possibile la descrizione del sistema tramite ensemble. In questi casi, se all'equilibrio, l'ambiente viene anche chiamato bagno termico. In questi termini il problema degli ensemble equivale a chiedersi se e sotto quali condizioni i sistemi isolati sono in grado di agire da bagno termico su se stessi.

Tratteremo ora più in dettaglio il problema degli ensemble in meccanica statistica. Prima discutere il caso di sistemi quantistici, che riguarda più da vicino il lavoro di tesi, esponiamo il quadro generale della situazione in meccanica classica.

Sistemi classici isolati

Consideriamo un sistema classico isolato composto da N particelle confinate in un volume V , lo spazio delle configurazioni è dato dallo spazio delle coordinate generalizzate e degli impulsi delle particelle $\{q_i, p_i\}$ che prende il nome di spazio delle fasi. La dinamica

del sistema è regolata dalle equazioni di Hamilton, date da

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{H(\{q_i, p_i\})}{\partial p_i} & \text{per } i = 1, 2, \dots, 3N \\ \dot{p}_i = -\frac{H(\{q_i, p_i\})}{\partial q_i} & \text{per } i = 1, 2, \dots, 3N \end{cases} \quad (1.1)$$

dove H è l'Hamiltoniana del sistema. Poiché il valore di H è conservato dalla dinamica (energia costante), il sistema è vincolato a muoversi su una superficie di energia $E = H(\{q_i, p_i\})$ fissata, detta “shell microcanonica”. Le misure fisiche effettuabili in laboratorio consistono in medie su un tempo di misura T_{mis} . Per una osservabile generica $O(\{q_i(t), p_i(t)\})$ si ha che il valore misurato dagli strumenti in laboratorio è una media temporale su un tempo di misura T_{mis} data da

$$O_{mis}(t) = \frac{1}{T_{mis}} \int_t^{t+T_{mis}} O(\{q_i(t'), p_i(t')\}) dt'. \quad (1.2)$$

Secondo la meccanica statistica la distribuzione di probabilità ρ_{mic} associata all'ensemble microcanonico è

$$\rho_{mic}(E, N, V, \{q_i, p_i\}) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E)} & \text{se } E - \frac{\Delta}{2} < H(\{q_i, p_i\}) < E + \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.3)$$

dove E è l'energia del sistema, Δ è un parametro piccolo introdotto al solo scopo di regolarizzare la distribuzione, $\Omega(E)$ è la costante di normalizzazione determinata dalla condizione $\int \rho_{mic}(E, N, \{q_i, p_i\}) \frac{d^{3N} p d^{3N} q}{h^{3N}}$, $\frac{d^{3N} p d^{3N} q}{h^{3N}}$ è l'elemento di volume nello spazio delle fasi, h è la costante di Planck che a questo livello ha l'unico scopo di rendere adimensionale l'elemento di volume. La media di ensemble di un osservabile O è data da

$$\langle O \rangle_{mic}(E, V, N) = \int \rho_{mic}(E, N, V, \{q_i, p_i\}) O(\{q_i, p_i\}) d^{3N} p d^{3N} q \quad (1.4)$$

Assumendo che il sistema effettivamente raggiunga uno stato di equilibrio termico in un tempo sufficientemente limitato (da essere osservato), l'uso della meccanica statistica è lecito se è possibile giustificare la sostituzione delle misure fisiche con le medie di ensemble. Poiché valori delle osservabili nello stato di equilibrio coincidono con la loro media su tempi lunghi, si deve avere

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} O_{mis}(t') dt' = \int \rho_{mic}(E, \{q_i, p_i\}) O(\{q_i, p_i\}) \frac{d^{3N} p d^{3N} q}{h^{3N}}. \quad (1.5)$$

Se l'evoluzione temporale soddisfa l'eq 1.5, si dice che il sistema è ergodico sulla shell microcanonica E . La condizione descritta dall'eq 1.5 prende il nome di “ipotesi ergodica”. Lo studio dei sistemi ergodici in meccanica classica ha attratto l'attenzione di molti fisici-matematici, è diventato un vero e proprio ramo della fisica-matematica che va sotto il nome di teoria ergodica. Per una discussione più approfondita degli aspetti matematici della teoria ergodica, del collegamento con la meccanica statistica classica, dei suoi successi e fallimenti rimandiamo a [5]. In generale la validità dell'ipotesi ergodica permette di sostituire le medie temporali con quelle di ensemble ma non dà informazioni sulle fluttuazioni temporali delle misure attorno al valore medio. Nel caso esista uno stato stazionario, l'ipotesi ergodica assicura che questo è descrivibile con la meccanica statistica. Rimane però da stabilire se e come il sistema, partendo da uno stato di non equilibrio, possa raggiungere l'equilibrio. Senza andare nel dettaglio sulla dinamica di non equilibrio del sistema, concludiamo osservando che l'ergodicità di un sistema garantisce che, se il sistema raggiunge uno stato stazionario, le medie temporali possono essere sostituite con medie di ensemble. Il raggiungimento di uno stato di equilibrio è garantito solo se per la scala di tempi τ_{dyn} che governa la dinamica microscopica si ha $\tau_{dyn} \ll T_{mis}$, che permette la sostituzione $T_{mis} = \infty$. Il rilassamento del sistema nel caso $\tau_{dyn} \gtrsim T_{mis}$ viene solitamente giustificato con altri argomenti che qua non menzioniamo, ma che sono discussi in [6].

Sistemi quantistici isolati

La giustificazione dell'uso degli ensemble statistici si complica notevolmente in meccanica quantistica. Secondo i postulati della meccanica quantistica [7], lo spazio delle configurazioni di un sistema isolato è l'insieme dei raggi unitari di uno spazio di Hilbert complesso \mathcal{H} e le quantità osservabili del sistema sono operatori autoaggiunti su \mathcal{H} . Utilizzando la notazione di Dirac, l'evoluzione temporale di uno stato $|\psi(t)\rangle$ in un sistema isolato è dato dalla seguente equazione di Schrödinger

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle. \quad (1.6)$$

Assumiamo che H sia indipendente dal tempo e che quindi coincida con l'energia del sistema. Il valore di aspettazione della misura fisica di un'osservabile O al tempo t è

$\langle O \rangle(t) = \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle$. Possiamo sviluppare $|\psi(t)\rangle$ su una base ortonormale $\{|\phi_n\rangle\}$ degli autostati dell'Hamiltoniana (per cui $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$)

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) |\phi_n\rangle \quad (1.7)$$

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad \sum_n |a_n(0)|^2 = 1 \quad (1.8)$$

dove $a_n(t) = \langle \phi_n | \psi(t) \rangle$. In questa base il valore di aspettazione di un'osservabile O assume la forma

$$\langle O \rangle(t) = \sum_n \langle \phi_n | O | \phi_n \rangle |a_n(0)|^2 + \sum_{n \neq m} \langle \phi_m | O | \phi_n \rangle a_m^*(0) a_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) t}. \quad (1.9)$$

L'eq 1.9 mette già in luce i problemi che emergono nel definire lo stato di equilibrio. Consideriamo per semplicità il caso in cui il sistema ha numero finito di gradi libertà N . Il valore di aspettazione $\langle O \rangle(t)$ coinvolge un numero finito di frequenze ed è quindi una funzione quasi periodica del tempo che non ammette un valore stazionario. Nel limite termodinamico, $N \rightarrow \infty$, il numero di frequenze coinvolte in 1.9 tende a infinito ed i tempi di ritorno del sistema diventano sperimentalmente non accessibili. In questo caso è ancora possibile parlare di un valore stazionario a cui le osservabili equilibrano o rilassano, per una formalizzazione del concetto rimandiamo a [8]. Secondo la meccanica statistica quantistica lo stato di equilibrio termico può essere descritto da un'opportuna matrice densità (operatore definito positivo a traccia unitaria) ρ con cui si possono calcolare i valori di aspettazione delle osservabili $\langle O \rangle_{eq} = \text{Tr}(O\rho)$ all'equilibrio. Per sistemi isolati si utilizza l'ensemble microcanonico la cui matrice densità ρ_{mic} è data da

$$\rho_{mic}(E) = \frac{1}{\Gamma(E)} \sum_{E - \frac{\Delta}{2} < E_n < E + \frac{\Delta}{2}} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \quad (1.10)$$

$$\Gamma(E) = \sum_{E - \frac{\Delta}{2} < E_n < E + \frac{\Delta}{2}} 1. \quad (1.11)$$

Lo stato di equilibrio termodinamico, descritto dall'eq 1.10, dipende solo dall'energia dello stato iniziale E . Allo stesso tempo, l'evoluzione temporale 1.7 è unitaria, lo stato del sistema $|\psi(t)\rangle$ ad ogni istante dipende da tutte le ampiezze $a_n(0)$ dello stato iniziale. I valori di aspettazione delle osservabili che hanno raggiunto l'equilibrio termodinamico, pur emergendo da una dinamica unitaria, non dipendono dal dettaglio delle condizioni iniziali. Poiché conoscendo tutti valori di aspettazione è possibile ricostruire lo stato

iniziale, l'unica possibilità è che l'informazione mancante sullo stato iniziale del sistema sia nascosta in operatori che non raggiungono l'equilibrio termodinamico. Diversamente dal caso classico non è possibile richiedere che tutte le variabili giungano ad un valore stazionario. Ad esempio consideriamo

$$\tau_{nm} = |\phi_n\rangle \langle \phi_m|. \quad (1.12)$$

Dall'eq 1.9 si ha $\langle \tau_{nm} \rangle(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} \langle \tau_{nm} \rangle(0)$. Se $E_n \neq E_m$ il valore di aspettazione di questo operatore è una funzione periodica e non ha un valore stazionario, infatti nel limite termodinamico si possono trovare valori E_n, E_m arbitrariamente distanti con cui creare operatori che oscillano su frequenze elevate. In effetti questa proprietà non è legata alla particolare scelta dell'operatore, molti operatori del sistema non raggiungono mai un valore stazionario. La maggior parte degli operatori hermitiani non sono comunque misurabili in un laboratorio. Questi prendono il nome di operatori globali e accoppiano efficacemente un numero di gradi di libertà estensivi nella taglia del sistema. Al contrario, le osservabili che sono fisicamente accessibili sono dette locali e accoppiano efficacemente solo un numero finito di gradi di libertà. Questa osservazione ha portato alla necessità di ridefinire il concetto di equilibrio termodinamico. Un sistema quantistico isolato in uno stato di energia E si dice quindi in equilibrio termico se, nel limite termodinamico, i valori di aspettazione delle osservabili locali A hanno un valore stazionario $\langle A \rangle_{eq}$ ben descritto dall'ensemble microcanonico $\rho_{mic}(E)$, ovvero

$$\langle A \rangle_{eq} = \text{Tr}(\rho_{mic}(E)A). \quad (1.13)$$

Per definizione sotto questa assunzione possiamo sempre applicare la meccanica statistica ad un sottosistema finito del sistema iniziale. Questo è in accordo con l'idea intuitiva che un sistema quantistico in equilibrio termodinamico agisce da bagno termico per tutti i suoi sottosistemi finiti, che sono molto più piccoli del sistema stesso. Un tentativo di giustificare l'equilibrio termodinamico nei sistemi quantistici è stato quello di argomentare che le medie quantistiche fatte sugli stati tipici della shell microcanonica, in cui il sistema è vincolato a muoversi, coincidono con quelle microcanoniche. Consideriamo un sistema in cui l'Hamiltoniana contiene solo interazioni locali e assegniamo una distribuzione di probabilità o misura sull'insieme degli stati (senza che questa dipenda da E o H), solitamente quella di Haar (invariante per trasformazioni unitarie). Secondo questa

misura, con altissima probabilità (tende ad uno per $N \rightarrow \infty$) i valori di aspettazione di operatori locali su uno stato random $|\psi_{rand}\rangle$ estratto dalla shell microcanonica sono indistinguibili da quelli microcanonici. Questo risultato suggerisce che, senza invocare l'evoluzione temporale, guardando il sistema in un momento casuale della sua esistenza, molto probabilmente potremo descriverlo con la meccanica statistica. Questi argomenti a favore della validità della meccanica statistica prendono il nome di argomenti tipicità e sono discussi in dettaglio in [9] e [10].

L'uso degli ensemble presuppone che il sistema si trovi all'equilibrio termodinamico. È naturale chiedersi cosa succeda se il punto iniziale non è uno stato di equilibrio. Se partendo da uno stato di non equilibrio il sistema, sulle componenti locali, raggiunge l'equilibrio termodinamico si dice che esso termalizza. Il processo dinamico che il sistema attraversa per raggiungere lo stato di equilibrio è detto “termalizzazione”.

Come nel caso classico, possiamo calcolare la media temporale \bar{O} su un tempo infinito di un'osservabile O . Per comodità consideriamo il caso in cui lo spettro è non degenere ($E_n = E_m \rightarrow m=n$). Utilizzando l'eq 1.9 otteniamo

$$\begin{aligned}\bar{O} &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \langle O \rangle(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sum_{n,m} O_{mn} a_m^*(0) a_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} dt \\ &= \sum_n |a_n(0)|^2 O_{nn} = \text{Tr}(O \rho_{diag})\end{aligned}\tag{1.14}$$

dove $O_{nm} = \langle \phi_m | O | \phi_n \rangle$ e abbiamo introdotto un ensemble diagonale che risulta dipendere dallo stato iniziale del sistema ed è descritto dalla matrice densità $\rho_{diag} = \sum_n |a_n(0)|^2 \tau_{nn}$. All'equilibrio termodinamico i valori di aspettazione delle osservabili locali devono coincidere con le medie temporali. Quindi per ogni osservabile locale A si deve avere $\text{Tr}(\rho_{diag} A) = \text{Tr}(\rho_{mic} A)$ che, esplicitando i membri dell'uguaglianza, diventa

$$\sum_n A_{nn} |a_n(0)|^2 = \frac{1}{\Gamma(E)} \sum_{E - \frac{\Delta}{2} < E_n < E + \frac{\Delta}{2}} A_{nn}.\tag{1.15}$$

L'eq 1.15 manifesta l'indipendenza dallo stato di equilibrio dalle condizioni iniziali. Infatti il termine di destra dipende solo dall'energia media mentre il termine di sinistra a

priori potrebbe dipendere dalla distribuzione iniziale dei $|a_n(0)|^2$. Per spiegare questo fenomeno sono stati proposti tre possibili scenari [11][12][13]:

- a Sia A_{nn} che $|a_n(0)|^2$ possono fluttuare molto al variare di n , ma per condizioni iniziali fisicamente realistiche le loro distribuzioni sono scorrelate. In questo caso la media del prodotto diventa il prodotto delle medie ed il termine di sinistra diventa equivalente ad un ensemble microcanonico, quindi Eq 1.15 è valida.
- b In condizioni fisicamente realistiche $|a_n(0)|^2$ sono quasi costanti al variare di n se valutati su stati con energia E_n vicina ad E . Anche in questo caso la media del prodotto si fattorizza, quindi Eq 1.15 è valida.
- c A_{nn} quasi non fluttuano se valutati su stati vicini. In questo caso l'eq 1.15 è valida per un qualsiasi stato iniziale.

Vari studi numerici tramite diagonalizzazione esatta e time dependent Density Matrix Renormalization Group (tDMRG) [14] hanno confermato, per diversi sistemi, la terza ipotesi che ha preso il nome di Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH) [15][11][16].

Assumendo la validità dell'ETH, l'eq 1.15 diventa

$$A_{nn} = \frac{1}{\Gamma(E)} \sum_{E_n - \frac{\Delta}{2} < E_m < E_n + \frac{\Delta}{2}} A_{mm} \quad \text{nel limite termodinamico.} \quad (1.16)$$

L'eq.1.16 afferma che, per qualsiasi operatore locale, il valore di aspettazione su un singolo autostato coincide con quello di equilibrio termodinamico. Quando questo vale, la termodinamica del sistema è già presente nelle proprietà del singolo autostato che può essere visto come un ensemble microcanonico nel limite $\Delta \rightarrow 0$ [17].

Spesso nella definizione di ETH si include la seguente richiesta sugli elementi di matrice degli operatori locali

$$A_{nm} < A_{qq} \quad \forall q, m \neq n. \quad (1.17)$$

Questa ulteriore condizione assicura anche che le fluttuazioni temporali delle quantità fisiche attorno al valore stazionario siano piccole. In particolare uno stato di non equilibrio può essere visto come sovrapposizione coerente di autostati vicini in energia, però questa coerenza iniziale è rotta dall'evoluzione temporale che tramite l'eq 1.9 introduce

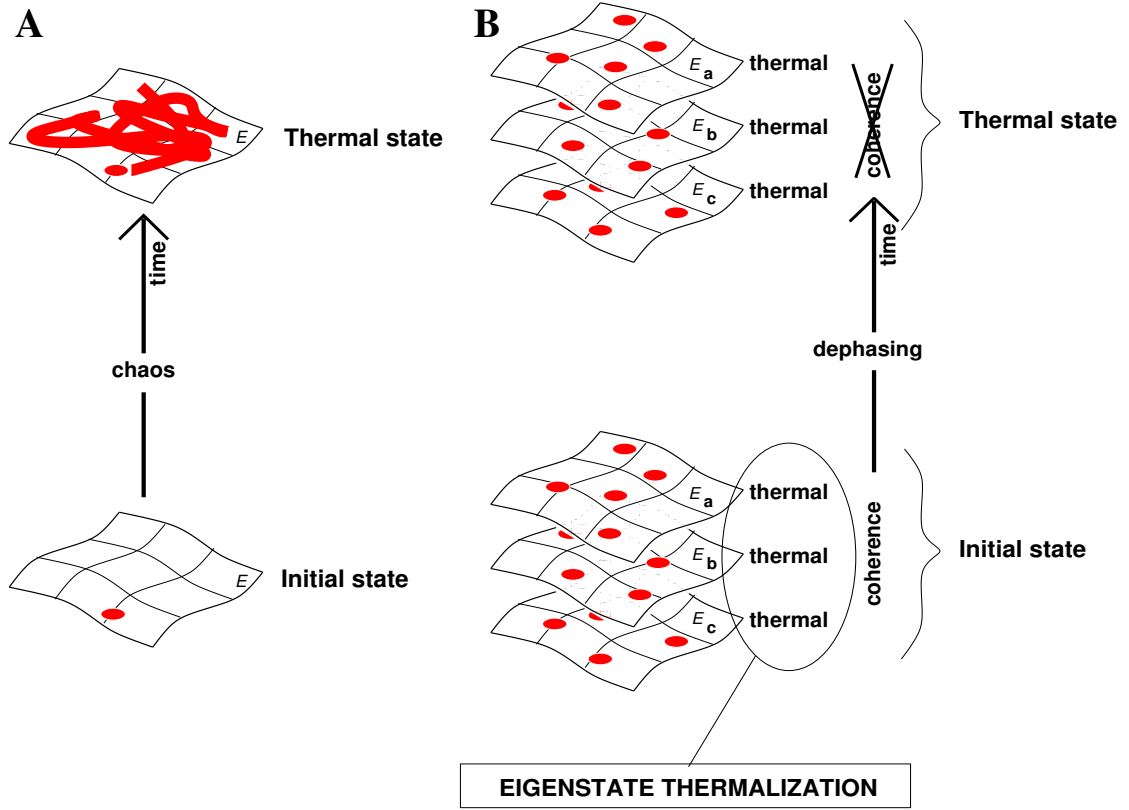


FIGURA 1.1: Descrizione grafica dell'ergodicità in meccanica classica (a) e quantistica (b). Da [11]

fasi casuali tra gli elementi off-diagonali A_{nm} , facendo riemergere il comportamento termico dei singoli autostati. La Figura 1.1 mette a confronto il processo di termalizzazione in sistemi classici e quantistici. A differenza del caso classico, il sistema quantistico non necessita di una dinamica caotica per termalizzare perché lo stato tipico del sistema è già termico.

Negli ultimi anni lo studio delle proprietà dei sistemi quantistici isolati ha ricevuto un rinnovato interesse che può essere imputato a due cause principali. Una ragione è data dalla possibilità di nuovi mezzi per studiare i sistemi quantistici a molti corpi. Lo studio dell'informazione quantistica ha contribuito a dare nuovi metodi matematici con cui affrontare il problema e l'avvento dei super computer insieme alle nuove tecniche numeriche hanno permesso di simulare la dinamica di sistemi quantistici a molti corpi a tempi lunghi [14][18][19]. L'altra ragione per il rinnovato interesse nei sistemi quantistici isolati è la recente "rivoluzione" sperimentale nel campo degli atomi ultra-freddi [20].

Le moderne tecniche sperimentali sviluppate in questo settore hanno reso possibile la realizzazione e il controllo di sistemi quantistici quasi-isolati, con molti gradi di libertà.

Tipicamente questi sistemi consistono in circa 10^7 atomi della stessa specie (es. Potassio ^{40}K , Rubidio ^{87}Rb , Litio ^7Li , Cesio ^{133}Ce , etc.) che vengono raffreddati fino a raggiungere un regime di gas degenere quantistico. Questo viene fatto tramite raffreddamento laser o raffreddamento evaporativo, mentre gli atomi sono confinati in una trappola ottica/magnetica, con frequenza di confinamento tipica $w_0 = 10 - 200\text{Hz}$. A causa delle basse temperature raggiunte (pickokelvin), il solo fatto che il gas esiste indica che è stato raggiunto un ottimo grado di isolamento dall'ambiente. Questi sistemi vengo lasciati evolvere quasi coerentemente nel tempo secondo l'eq 1.6 e la distribuzione degli atomi ad un determinato istante può essere catturata misurando i tempi di volo degli atomi.

Due innovazioni principali hanno allargato notevolmente il range della fisica accessibile negli esperimenti con gli atomi ultra-freddi. Queste due sono la possibilità di regolare le interazioni tra gli atomi tramite risonanze di Feshbach [21] e la possibilità di creare potenziali ottici intensi che permettono di confinare gli atomi spazialmente [22]. Grazie a questi progressi ora è possibile controllare i parametri che governano l'Hamiltoniana del sistema quasi-isolato e realizzare sistemi quantistici fortemente interagenti, il cui studio è diventato fondamentale per capire ed interpretare i risultati degli esperimenti.

Una questione di fondamentale importanza, che riguarda la dinamica di questi sistemi, è capire in quale stato si troverà il sistema dopo una lunga evoluzione temporale, data dall'eq 1.6. In particolare siamo interessati all'esito di misure delle osservabili locali (le uniche effettivamente misurabili) del sistema, la cui dinamica è descritta dall'eq 1.9. La prima domanda che ci poniamo è se queste osservabili rilasceranno ad un valore stazionario descritto dall'eq 1.14. Nel caso in cui lo stato stazionario effettivamente esista, ci domandiamo anche come possiamo descriverlo. L'esperienza comune suggerisce che, se il sistema ha molti gradi di libertà, il sistema isolato termalizzerà, raggiungerà uno stato di equilibrio termodinamico descritto dall'eq 1.10 e le informazioni riguardanti lo stato iniziale non saranno più recuperabili. In effetti questa condizione di termalizzazione è quella che solitamente osserviamo in natura, ma non è detto che valga sempre. *Vogliamo capire se è possibile individuare sistemi quantistici isolati che non termalizzano.*

Sistemi quantistici che non termalizzano

Consideriamo un sistema di N spin-1/2 non interagenti e in presenza di un campo magnetico \mathcal{B} . L'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{B}\mu_{mag}}{2} \sigma_i^z \quad (1.18)$$

dove μ_{mag} è il momento magnetico associato agli spin, σ_i^z è la terza delle matrici di Pauli, che sono date da

$$\sigma_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_i, \quad \sigma_i^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_i, \quad \sigma_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_i \quad (1.19)$$

e agisce solo sull' i -esimo spin. Tutti i σ_i^z commutano tra loro e quindi anche con l'Hamiltoniana che ne è una somma. La dinamica di eq 1.9 lascia invariati i valori di aspettazione degli operatori che commutano con H , che sono quindi costanti del moto. In questo caso tutti i possibili prodotti dei σ_i^z sono costanti del moto. In particolare, quelli ottenuti moltiplicando un numero piccolo (rispetto ad N) di spin sono costanti del moto locali. Queste osservabili, che sono in numero esponenzialmente crescente con N , non possono rilassare ad un valore di equilibrio quindi il sistema non termalizza. Il fatto che la presenza di costanti del moto locali, oltre l'Hamiltoniana, sia un ostacolo alla termalizzazione è vero in generale. Un altro modo per argomentare l'assenza di termalizzazione è osservando che i singoli spin costituiscono sistemi quantistici isolati. Poiché in sistemi quantistici con pochi gradi di libertà le osservabili non possono equilibrare ad alcun valore, il sistema non può termalizzare. In generale, la presenza di sottosistemi isolati è un ostacolo al rilassamento delle osservabili (e alla termalizzazione). In particolare in sistemi non interagenti ha poco senso parlare di termalizzazione. I sistemi in natura sono solitamente interagenti, perciò non sorprende che spin descritti dall'eq 1.18 abbiano un comportamento profondamente diverso da quello tipicamente osservato in natura.

Ci chiediamo quindi se esistano esempi di sistemi interagenti non termalizzanti. Per cercare questo contro esempio sfruttiamo l'osservazione che l'esistenza di costanti del moto locali non favorisce la termalizzazione. Partiamo dal caso classico dove la situazione è meglio compresa. In meccanica classica un sistema che ammette un set completo (di numero pari ai gradi di libertà del sistema) di integrali del moto I_n funzionalmente

indipendenti e in involuzione è detto integrabile. Per sistemi integrabili classici le coordinate e gli impulsi hanno una dinamica periodica e il sistema è vincolato a muoversi solo su una piccola zona dello spazio delle fasi. La dinamica di questi sistemi non è ergodica e rimane tale anche per perturbazioni sufficientemente piccole dell'Hamiltoniana. In meccanica classica quindi il concetto di integrabilità è ben definito e compreso. Una nozione condivisa di integrabilità in meccanica quantistica invece non è disponibile. Infatti i sistemi quantistici ammettono un set completo di integrali del moto funzionalmente indipendenti in involuzione, dato dall'insieme dei proiettori sugli autostati di H . A causa di questo in letteratura si trovano diverse definizioni di integrabilità per sistemi quantistici, queste sono discusse in [23][24]. Qui non daremo una definizione precisa ma ci baseremo su una condizione spesso soddisfatta da questi sistemi[25].

In un sistema integrabile possiamo trovare un set di $M = \mathcal{O}(N)$ integrali del moto $\{I_\alpha\}$ indipendenti, locali e tali che

$$[H, I_\alpha] = [I_\alpha, I_\beta] = 0 \quad \forall \alpha, \beta \quad (1.20)$$

$$H = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} I_{\alpha}. \quad (1.21)$$

La richiesta di località degli I_α rende la loro esistenza non scontata. Per chiarire il concetto, consideriamo i bosoni impenetrabili che rappresentano un sistema fortemente interagente dove la repulsione vieta ai bosoni di compenetrarsi. L'Hamiltoniana che consideriamo per questi bosoni è

$$H = -J \sum_{i=1}^L (b_i^+ b_{i+1} + h.c.) \quad (1.22)$$

dove J è una costante, b_i^+ e b_i sono operatori di creazione e distruzione per bosoni sull' i -esimo sito, la sigla h.c. indica l'hermitiano coniugato del termine alla sua sinistra. Essendo operatori bosonici, b_i^+ e b_i soddisfano

$$[b_i, b_j] = 0, [b_i, b_j^+] = 0 \quad \forall i \neq j \quad (1.23)$$

mentre il vincolo di impenetrabilità dà

$$\{b_i, b_i\} = 0, \{b_i, b_i^+\} = 1. \quad (1.24)$$

Utilizziamo condizioni al bordo periodiche ($b_{N+1} = b_1$), questo è lecito perché la scelta delle condizioni al bordo del sistema non ha alcuna rilevanza nel limite termodinamico. Questo modello può essere mappato in un modello di spin tramite la trasformazione

$$\begin{cases} \sigma_i^z &= 2n_i - 1 \\ \sigma_i^- &\equiv \sigma_i^x - i\sigma_i^y = 2\sqrt{1-n_i}b_i \\ \sigma_i^+ &\equiv \sigma_i^x + i\sigma_i^y = 2b_i^+\sqrt{1-n_i} \end{cases} \quad (1.25)$$

Il modello di spin può successivamente essere mappato in un modello di fermioni tramite una trasformazione di Jordan Wigner [26]. La composizione delle due trasformazioni porta a

$$b_j^+ = c_j^+ \prod_{j'=1}^{j-1} e^{-i\pi c_{j'}^+ c_{j'}^+} \quad (1.26)$$

dove c_j, c_j^+ sono operatori di creazione e distruzione fermionici su siti diversi ($\{c_i, c_j\} = 0$ e $\{c_i^+, c_j\} = \delta_{ij}$), b_j si può trovare facendo l'*h.c.* di 1.26. In termini degli operatori fermionici H diventa

$$H = -J \sum_{i=1}^L (c_i^+ c_{i+1} + h.c.) \quad (1.27)$$

con condizioni al bordo periodiche se L è pari e antiperiodiche altrimenti. Per comodità consideriamo solo il caso L pari (il caso dispari è analogo). Effettuando l'ulteriore trasformazione (di Fourier) in operatori fermionici $a_k = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L e^{-i2\pi k \frac{j}{L}} c_j$ con $k = 1, \dots, N$ si ottiene

$$H = -2J \sum_{k=1}^N \cos\left(2\pi \frac{k}{L}\right) I_k \quad (1.28)$$

$$I_k = a_k^+ a_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L e^{-i2\pi k \frac{(i-j)}{L}} c_j^+ c_i. \quad (1.29)$$

Le costanti del moto I_k conservate sono i quasi-momenti fermionici.

In un sistema che soddisfa la proprietà 1.20 non si può ottenere un rilassamento completo perché questo ha un numero M elevato di osservabili locali che non possono rilassare. Rimane però lecito domandarsi se il sistema raggiunga uno stato stazionario e come esso possa essere descritto. Secondo la meccanica statistica, lo stato di equilibrio di un sottosistema locale può essere descritto da una matrice densità canonica $\rho_{can}(T)$ data

da

$$\rho_{can}(T) = \frac{1}{Z(T)} e^{-\frac{H}{k_B T}} \quad (1.30)$$

dove T è la temperatura del sistema che è fissata dal vincolo $E = \text{Tr}_{\rho_{can}(T)} H$ e $Z(T) = \text{Tr} \left(e^{-\frac{H}{k_B T}} \right)$ è la funzione di partizione del sistema. Poiché la matrice densità $\rho_{can}(T)$ non tiene conto degli aggiuntivi vincoli sulla dinamica del sistema data dagli I_n , non è adatta a descrivere i sistemi integrabili. Per sistemi integrabili la diretta generalizzazione dell'ensemble canonico è data da

$$\rho_{GGE} = e^{-\sum_n \lambda_n I_n} \quad (1.31)$$

dove λ_n sono le quantità intensive che descrivono il sistema. L'eq 1.31 prende il nome di Ensemble di Gibbs Generalizzato (GGE). Studi numerici [27] hanno provato che anche in sistemi integrabili effettivamente esiste uno stato di equilibrio e che questo può essere descritto dal GGE. In questo caso lo stato di equilibrio raggiunto dal sistema dipende da un numero infinito di parametri λ_n , ma ne servono comunque molti meno che nel caso generico di ensemble diagonale. Nell'esempio di bosoni impenetrabili, lo stato di equilibrio è descritto da N parametri, mentre per quello iniziale o per l'ensemble diagonale ne servono 2^N . Inoltre con il GGE è possibile dare una versione generalizzata dell'ETH soddisfatta da questi sistemi [28].

I sistemi integrabili quantistici sono quindi una classe di sistemi non ergodici per cui l'ETH usuale non vale, però in un senso generalizzato termalizzano verso un GGE. Per realizzare la condizione di integrabilità è necessario un “fine tuning” dei parametri dell'Hamiltoniana. Per ristabilire la termalizzazione nei sistemi integrabili è sufficiente sommare all'Hamiltoniana una piccola perturbazione V . In [29][12] è stato dimostrato che l'Hamiltoniana perturbata $\tilde{H} = H + V$ soddisfa l'ETH per quasi tutte le scelte di V . Rinunciando all'invarianza per traslazioni e considerando sistemi, disordinati è possibile trovare una classe di sistemi che non può essere descritta da alcun ensemble generalizzato e che risulta stabile per perturbazioni locali.

Sistemi localizzati

Un caso di sistemi in cui l'assenza di termalizzazione mostra conseguenze ancora più drammatiche è dato dai sistemi localizzati, che non sono descrivibili da alcun tipo di

GGE. Il concetto di localizzazione fu introdotto per primo da Anderson che nel 1958 [30], motivato dagli esperimenti di Fesher[31], dimostrò che in sistemi fortemente disordinati gli autostati di singola particella possono decadere esponenzialmente

$$|\psi_\alpha(\vec{r})|^2 \propto \frac{1}{\xi_{loc}^d} e^{-\frac{2|\vec{r}-\vec{R}_\alpha|}{\xi_{loc}}} \quad (1.32)$$

dove d è la dimensione del sistema, V è il volume, ξ_{loc} prende il nome di lunghezza di localizzazione, \vec{R}_α è il punto attorno a cui l'autostato è localizzato. Questo ha delle pesanti conseguenze sulle proprietà di trasporto del sistema che risulta non essere in grado di raggiungere l'equilibrio termico.

Per affrontare il problema, Anderson studiò il fenomeno in assenza di interazioni, che prende il nome di Localizzazione di Anderson (AL). Il caso di sistemi interagenti si è rivelato più difficile da studiare ed i risultati teorici hanno tardato ad arrivare. Per molto tempo, l'assenza di controesempi, ha indotto a pensare che la presenza di interazioni, per quanto piccole, fosse sufficiente a distruggere la localizzazione e a garantire la termalizzazione del sistema. Recentemente questa convinzione si è rivelata falsa. Se il disordine è sufficientemente elevato la localizzazione può persistere anche in presenza di interazioni, portando così ad un fenomeno completamente nuovo che prende il nome di localizzazione a molti corpi.

I sistemi localizzati a molti corpi (Many Body Localized MBL) formano una vasta classe di sistemi, che pur essendo interagenti, non termalizzano in alcun modo. Inoltre, poiché la localizzazione si verifica in sistemi disordinati, non è causata da una particolare realizzazione di disordine quindi è stabile per perturbazioni. Le proprietà (o congetture) che rendono i sistemi MBL interessanti sia dal punto di vista teorico che applicativo sono le seguenti [32][33]:

- Il fenomeno della localizzazione a molti corpi può avvenire in un generico sistema quantistico. Si può avere localizzazione indipendentemente dal numero di dimensioni spaziali del sistema e dalla natura dei gradi di libertà che lo compongono. In particolare la localizzazione è prevista per spin, fermioni, bosoni e sistemi misti. Inoltre i sistemi localizzati ammettono una descrizione comune in termini di operatori localizzati. Queste proprietà suggeriscono che la localizzazione sia un fenomeno universale, al pari della termalizzazione

- Al contrario dei sistemi termalizzanti, dove le misure sperimentali non permettono di ricostruire lo stato iniziale, nei sistemi MBL questo è possibile. A causa della localizzazione, l'evoluzione del sistema mantiene l'informazione sullo stato iniziale in gradi di libertà locali. L'informazione può quindi essere recuperata operando localmente sul sistema. Questo rende i sistemi MBL dei buoni candidati a memorie quantistiche in future applicazioni pratiche.
- Variando alcuni parametri, che sono controllabili in laboratorio (come il disordine, le interazioni e l'energia del sistema), i sistemi quantistici possono passare da una fase delocalizzata (termalizzante) ad una fase MBL. Questo fenomeno viene chiamato transizione MBL Delocalizzata (MBLD). La transizione MBLD è molto diversa dalle usuali transizioni termodinamiche e le sue proprietà devono ancora essere chiarite.

Nonostante il fenomeno della MBL sia previsto anche per bosoni, in letteratura non vi sono studi numerici che trattano questo caso. Riteniamo uno studio della MBL nel caso bosonico importante dal punto di vista teorico in quanto permette esplorare la MBL in regimi di interazioni forti, in cui gli studi analitici non hanno ancora dato un risultato. Inoltre i sistemi bosonici si prestano naturalmente a realizzazioni sperimentali con atomi freddi. Per questa ragione abbiamo deciso di studiare la MBL in un modello di Bose Hubbard, ampiamente studiato con i reticoli ottici.

La tesi è strutturata come segue.

Nella prima parte del secondo capitolo introduciamo brevemente la localizzazione a molti corpi. Esponiamo come l'aggiunta di interazioni tra i gradi di libertà del sistema possa modificare il comportamento dei sistemi localizzati secondo Anderson. Successivamente diamo una possibile definizione del fenomeno della MBL. Dopo aver inquadrato il problema della localizzazione a molti corpi, discutiamo l'esistenza di una fase MBL riportando l'argomento perturbativo di Basko et al. e la recente osservazione sperimentale del fenomeno. Nella seconda parte del capitolo diamo la definizione generale del fenomeno di localizzazione, qui sono descritte e spiegate alcune proprietà che caratterizzano la fase MBL e la distinguono sia da una fase termalizzante che da una localizzata secondo Anderson. Concludiamo il capitolo descrivendo la fenomenologia della MBL proposta da Huse e Oganesyan [34].

Il terzo capitolo contiene il lavoro originale sviluppato durante la tesi. Presentiamo in dettaglio il modello considerato, descrivendo i collegamenti con la fisica degli atomi freddi. Illustriamo le tecniche numeriche utilizzate per studiare il modello. Viene utilizzata un'analisi della statistica dei livelli e dell'entropia per indagare l'esistenza di una fase MBL nel sistema. Infine applichiamo un'analisi di finite scaling dell'entropia per determinare il diagramma di fase del sistema.

Nel capitolo conclusivo riassumiamo i risultati ottenuti, e discutiamo le future prospettive di ricerca nel campo della localizzazione a molti corpi.

Capitolo 2

Localizzazione a molti corpi in sistemi disordinati

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto una classe di sistemi non interagenti detti AL in cui gli autostati di singola particella decadono esponenzialmente secondo l'eq 1.32. La validità del fenomeno della localizzazione di Anderson è stata dimostrata rigorosamente [35][36] e sperimentalmente, è stata confermata in vari sistemi di atomi freddi [37][38], fotoni, fononi ed elettroni [39].

Per illustrare il fenomeno e il collegamento con la termalizzazione consideriamo la seguente Hamiltoniana per elettroni liberi su un reticolo d dimensionale

$$H_0 = - \sum_{ij} t_{ij} c_i^\dagger c_j + \sum_i w_i n_i \quad (2.1)$$

dove c_i^\dagger e c_i sono gli operatori di creazione e distruzione fermionici, $n_i = c_i^\dagger c_i$ è l'operatore numero mentre w_i sono livelli energetici su singolo sito, t_{ij} è la matrice di hopping che agisce solo a corto raggio e dipende solo dalla distanza tra i siti. Tipicamente viene considerato un hopping a primi vicini, per cui ($t_{ij} = t$ se i e j sono primi vicini, $t_{ij} = 0$ altrimenti). Una buona base per il problema a singola particella è data dagli stati $|i\rangle = c_i^\dagger |0\rangle$. In questa base l'Hamiltoniana assume la forma

$$H_0 = - \sum_{ij} t_{ij} |i\rangle \langle j| + \sum_i w_i |i\rangle \langle i|. \quad (2.2)$$

Gli autostati dell'Hamiltoniana possono essere scritti come $|\phi_n\rangle = \sum_i \phi_n(i) |i\rangle$. Se w_i è periodica sul reticolo, il teorema di Bloch [40] assicura che, per gli autostati del sistema, la carica elettrica per sito $-e \langle \phi_n | n_i | \phi_n \rangle = -e |\phi_n(i)|^2$ è una funzione periodica sul reticolo. In questo caso la densità di carica è estesa su tutto il sistema e gli autostati si dicono delocalizzati. Se il sistema è preparato in uno stato in cui la carica elettrica è tutta concentrata su un sito, durante l'evoluzione temporale questa si sposterà per raggiungere la condizione descritta dall'ensemble diagonale, in cui è uniforme sul sistema (su una scala di lunghezza molto maggiore della periodicità del reticolo). Il sistema periodico è quindi sempre in grado di trasportare la carica elettrica e questo si manifesta in coefficienti di diffusione e conducibilità non nulli.

Lo scenario cambia totalmente se consideriamo invece un sistema disordinato, in cui potenziali chimici sul singolo sito hanno una distribuzione casuale dovuto ad esempio a imperfezioni del cristallo. Nel modello questo può essere ottenuto considerando i w_i come variabili aleatorie con distribuzione uniforme tra $[-W, W]$ ($W > 0$). Per $t_{ij} = 0$ Gli autostati del sistema sono gli stessi $|i\rangle$ e sono quindi tutti localizzati su un sito unico. Per $|t_{ij}| \ll W$, l'espansione perturbativa, quando converge, prevede autostati ancora localizzati. La convergenza della serie perturbativa risulta fortemente influenzata dalla dimensionalità d . La stima (per eccesso) del minimo valore W_c in cui la serie perturbativa converge a stati localizzati è [30]

$$\frac{td}{W_c} \log \frac{W_c}{t} \approx 1. \quad (2.3)$$

Per $W > W_c$ gli autostati del sistema rimangono localizzati. Tecniche più avanzate hanno permesso di comprendere il comportamento del sistema anche per $W < W_c$ [41]. In una e due dimensioni lo spettro risulta essere totalmente localizzato ad ogni valore di $W \neq 0$. In tre o più dimensioni, a bassi W , lo spettro presenta sia autostati localizzati che autostati estesi. L'energia che separa gli autostati di tipo diverso viene detta *mobility edge*. In Figura 2.1 è schematizzata la densità di stati (DOS) di un sistema non interagente in presenza di una *mobility edge*.

Prendendo come stato iniziale una combinazione di autostati localizzati in una zona limitata nello spazio, secondo le predizioni dell'ensemble diagonale, la carica non rilascerà mai ad una condizione di equilibrio ma rimarrà localizzata attorno a dove l'avevamo inizializzata. Il sistema, ad energie che corrispondono a stati localizzati, non è in grado

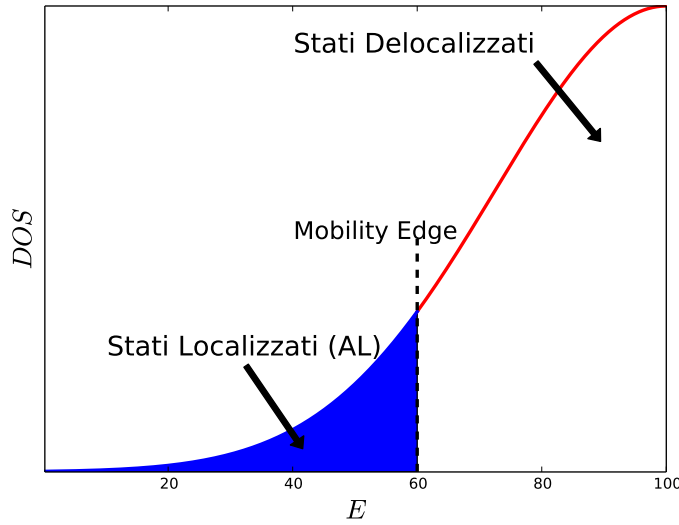


FIGURA 2.1: Schematizzazione della densità di stati (DOS) in funzione dell'energia (E) in un sistema disordinato non interagente con una mobility edge. Al centro della banda gli stati sono delocalizzati, mentre gli stati nella coda della DOS sono localizzati secondo Anderson. La mobility edge è assume un valore finito che non scala con la taglia del sistema.

di ridistribuire la carica e questo si manifesta con l'annullarsi della conducibilità e del coefficiente di diffusione. In generale, quando queste sono nulle, informazioni sullo stato iniziale possono essere recuperate misurando operatori di densità locali.

I sistemi localizzati sono quindi fortemente non termalizzanti, in quanto l'assenza di trasporto viola l'indipendenza dello stato finale da quello iniziale. Come abbiamo accennato nel capitolo introduttivo l'assenza di termalizzazione in sistemi non interagenti è condizione nella norma.

Affinché la dinamica del sistema a molti corpi risulti non banale (come in eq 1.18) è necessario introdurre le interazioni nel sistema.

2.1 Interazione con i fononi

Il primo a studiare con successo l'effetto delle interazioni sulla AL fu Mott nel 1968 [42]. Poiché gli elettroni di un cristallo possono essere scatterati dai fononi, Mott studiò l'effetto dell'interazione fonone-elettrone sulla conducibilità elettrica del sistema a basse temperature $T \ll T_F$ (dove T_F è la temperatura di Fermi degli elettroni).

Per rendere più chiaro che cosa succede in presenza di interazioni, consideriamo un sistema con tutto lo spettro localizzato su una lunghezza ξ_{loc} , che in assenza di interazioni con il bagno termico ha conducibilità nulla. Consideriamo due stati separati da una distanza R . Lo stato di sinistra ha un'energia E_1 , mentre quello di destra ha un'energia E_2 in modo che $\Delta E = E_2 - E_1 > 0$. Per la regola d'oro di fermi si ha

$$w_{2 \rightarrow 1} = w_0 e^{-2 \frac{R}{\xi_{loc}}} f_2 (1 - f_1) (n(\Delta E) + 1) \quad \text{emissione di un fonone} \quad (2.4)$$

$$w_{1 \rightarrow 2} = w_0 e^{-2 \frac{R}{\xi_{loc}}} f_1 (1 - f_2) n(\Delta E) \quad \text{assorbimento di un fonone} \quad (2.5)$$

dove w_0 è una frequenza tipica del sistema, $n(\Delta E)$ è la distribuzione termica dei fononi f_1 e f_2 sono le distribuzioni termiche di fermi $f_i = \left(1 + e^{\frac{E_i - \mu_i}{k_B T}}\right)^{-1}$. Il potenziale chimico μ_i non è uniforme a causa del potenziale elettrico. La corrente netta I_{12} dovuta al processo di hopping è

$$I_{12} = eR(w_{2 \rightarrow 1} - w_{1 \rightarrow 2}). \quad (2.6)$$

Sostituendo le eq 2.5 e 2.4 in eq 2.6, linearizzando in $\mu_2 - \mu_1$ e tenendo solo i termini proporzionali a questo si trova

$$I_{12} = \frac{eRw_0}{k_B T} \left(e^{-2 \frac{R}{\xi_{loc}} - \frac{\Delta E}{k_B T}} \right) (\mu_1 - \mu_2). \quad (2.7)$$

La differenza di potenziale chimico tra i due stati è dovuto al potenziale elettrico esterno V_{12} e vale $\mu_2 - \mu_1 = eV_{12}$. Utilizzando questa relazione si ottiene per la conduttanza G_{12} tra i due stati è

$$G_{12} = \frac{I_{12}}{V_{12}} = \frac{e^2 R w_0}{k_B T} \left(e^{-2 \frac{R}{\xi_{loc}} - \frac{\Delta E}{k_B T}} \right). \quad (2.8)$$

In generale alla conducibilità del sistema contribuiranno tutte le coppie di stati che formano una rete di conduttanze G_{ij} [43], l'idea di Mott fu di stimare la conduttanza del sistema, con il valore ottimale per l'esponente in eq 2.8. Supponiamo che la densità ν_F di stati per unità di volume del sistema vicino all'energia di fermi sia costante. La differenza di energia ΔE tipica tra due stati a distanza R si può stimare in

$$\Delta E \sim \frac{1}{R^d \nu_F} \quad (2.9)$$

dove d è il numero di dimensioni fisiche del sistema. Sostituendo l'eq 2.9 in 2.8 e massimizzando in R la funzione ottenuta, si ha che l'interazione fonone-elettrone porta ad

una conducibilità $\sigma_{el-phon}$ il cui andamento con la temperatura è

$$\log \sigma_{el-phon} \approx - \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{d+1}} \quad (2.10)$$

Questa in 3 dimensioni diventa la famosa legge di Mott $T^{-\frac{1}{4}}$, osservata sperimentalmente in ad esempio in [44].

L'eq 2.10 vale in generale per elettroni localizzati secondo Anderson che interagiscono con un bagno termico. L'eq 2.10 esprime il fatto che il bagno termico tramite l'attivazione di processi di scattering inelastici per l'elettrone permette al sistema di trasportare le quantità conservate (carica elettrica), che in assenza di interazioni sarebbero temporalmente congelate.

2.2 Localizzazione nello spazio di Hilbert per Fermioni e Mobility Edge del sistema a molti corpi

Consideriamo ora il caso in cui il sistema di elettroni sia isolato ma ci siano interazioni elettrone-elettrone. Cosa succede alla localizzazione di Anderson in presenza di interazioni tra gli elettroni? Ci sono due diverse risposte a questa domanda e sono entrambe coerenti. La prima è che, come nel caso dell'hopping indotto dai fononi, i processi di scattering elettrone-elettrone rendano nuovamente possibile il trasporto della carica, ovvero che il sistema si comporti da bagno termico per le sue componenti. La seconda possibilità è che il sistema rimanga (come studiato in [45]) un isolante, non riuscendo ad agire da bagno termico per se stesso, come previsto dalla teoria perturbativa. In questo caso il sistema interagente si dice localizzata a molti corpi (MBL).

La prima difficoltà nello studiare la localizzazione a molti corpi si incontra già nel capire quando e in che senso un autostato è localizzato. Richiedere che la densità di particelle decada esponenzialmente non è possibile. Questa richiesta risulta troppo stringente, perché non è soddisfatta nemmeno dagli autostati a molte particelle dell'isolante di Anderson. Il prodotto tensore di stati di singola particella localizzati presi in punti diversi, in modo da coprire tutto il reticolo, è spazialmente esteso. Rimane però ancora possibile instaurare un'analogia tra gli autostati localizzati secondo Anderson e quelli localizzati a molti corpi. Consideriamo un Hamiltoniana H che è somma di un termine

H_0 non interagente, con uno spettro di singola particella totalmente localizzato e di un termine H_{int} dovuto a interazioni locali a due corpi tra gli elettroni. Qui per chiarezza consideriamo il seguente modello specifico in una dimensione

$$H = H_0 + H_{int} \quad (2.11)$$

$$H_0 = - \sum_{i=1}^L (c_i^+ c_{i+1} + h.c.) + \sum_{i=1}^L w_i n_i \quad (2.12)$$

$$H_{int} = \lambda \sum_{i=1}^L c_i^+ c_{i+1}^+ c_i c_{i+1} \quad (\lambda \ll 1). \quad (2.13)$$

dove $\lambda \ll 1$ è la costante di accoppiamento dei fermioni, w_i è scelto con probabilità uniforme in $[-W, W]$. Il sistema può essere diviso in blocchi con autostati localizzati di lunghezza circa ξ_{loc} (tipica lunghezza di localizzazione), così che in ogni blocco solo gli autostati localizzati al bordo hanno una sovrapposizione significativa con gli altri blocchi. La dinamica nel singolo blocco è quindi regolata dal tipico spaziamento medio tra i livelli degli autostati nel blocco, che vale

$$\delta_\xi = \frac{\Delta E}{\#stati} = \frac{\Delta E}{\xi_{loc}^d \nu \Delta E} = \frac{1}{\xi_{loc}^d \nu} \quad (2.14)$$

dove ν è la densità di stati per unità di volume, ξ_{loc}^d stima il volume di localizzazione. Possiamo scrivere l'Hamiltoniana in termini degli operatori creazione d_i^+ e distruzione d_i di fermioni negli autostati di singola particella $|\phi_i\rangle$ di H_0 localizzati in \vec{R}_i

$$H = \sum_n \epsilon_n d_n^+ d_n + \sum_{ijkl} V_{ij,kl} d_i^+ d_j^+ d_l d_k \quad (2.15)$$

ϵ_n è l'energia del singolo autostato del sistema, $V_{ij,kl}$ è il termine di interazione nella base degli autostati localizzati. Si ha quindi

$$H_0 |\phi_n\rangle = \epsilon_n |\phi_n\rangle \quad (2.16)$$

$$V_{ij,kl} = \langle \phi_i | \langle \phi_j | H_{int} | \phi_l \rangle | \phi_k \rangle \quad (2.17)$$

$$d_n^+ = \sum_i \langle i | \phi_n \rangle c_i^+ \quad (2.18)$$

Indichiamo con $|\vec{\alpha}\rangle = |\alpha_1 \dots \alpha_L\rangle = \prod_n (d_n^+)^{\alpha_n} |0\rangle$ un generico stato di Fock del sistema.

In questa base otteniamo il modello

$$H = \sum_{\vec{\alpha}} \mu_{\vec{\alpha}} |\vec{\alpha}\rangle \langle \vec{\alpha}| + \sum_{\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}} V_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} |\vec{\alpha}\rangle \langle \vec{\beta}| \quad (2.19)$$

$$\mu_{\vec{\alpha}} = \sum_n \alpha_n (\epsilon_n + V_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}}) \quad (2.20)$$

$$V_{\vec{\beta}\vec{\alpha}} = \sum_{ijkl} V_{ijkl} \langle \vec{\beta} | d_i^+ d_j^+ d_k d_l | \vec{\alpha} \rangle \quad (2.21)$$

L'Hamiltoniana 2.19 ha la stessa forma di H_0 in 2.2 ma le connessioni $V_{\vec{\alpha}\vec{\beta}}$ definiscono un grafo più complicato. La forma generica per un autostato del sistema è $|\psi_k\rangle = \sum_{\vec{\alpha}} a_{\vec{\alpha}} |\vec{\alpha}\rangle$. In assenza di interazioni il sistema è localizzato secondo Anderson, conseguentemente gli autostati sono localizzati sui singoli siti del grafo. In generale l'interazione tende a delocalizzare gli autostati del sistema, che risultano avere pesi $a_{\vec{\alpha}}$ non nulli su più stati del sistema. Questo quindi suggerisce una corrispondenza tra fase MBL del sistema e la fase una localizzazione simile a quella di Anderson ma nello spazio di Hilbert del sistema (il concetto è reso più rigoroso dall'analisi delle funzioni spettrali del sistema).

L'analogia proposta di fatto non semplifica il problema, ma è utile per comprendere meglio il fenomeno della localizzazione ed è un punto conveniente da cui iniziare una trattazione perturbativa per il limite $\lambda \ll 1$. Utilizzando questa analogia è infatti possibile comprendere qualitativamente i risultati ottenuti da Basko et al. [46]. La differenza sostanziale tra il grafo nello spazio di Hilbert ed il reticolo di Anderson è nascosta nel numero di punti a cui è accoppiato efficacemente un punto del reticolo, indicheremo con $z_{\vec{\alpha}}$ questo numero di punti. Per determinare $z_{\vec{\alpha}}$ è necessario esplicitare i vincoli sulla forma del potenziale. Poiché l'interazione H_{int} è locale, V_{ijkl} accoppia solo stati nello stesso volume di localizzazione, ovvero V_{ijkl} è apprezzabile solo se

$$\max(|R_i - R_k|, |R_i - R_l|, |R_i - R_k|, \dots) < \xi_{loc} \quad (2.22)$$

Inoltre V_{ijkl} non può collegare stati eccessivamente distanti in energia, per cui V_{ijkl} sarà apprezzabile solo se

$$|\epsilon_i - \epsilon_k|, |\epsilon_j - \epsilon_l| < \delta_{\xi} \text{ oppure } |\epsilon_i - \epsilon_l|, |\epsilon_j - \epsilon_k| < \delta_{\xi} \quad (2.23)$$

Quest'ultima condizione, legata al fatto che per deboli interazioni nei processi di scattering le energie di singolo elettrone non variano di molto, è stata verificata numericamente

in [47]. Tenendo conto che la scala di energia rilevante nel problema è δ_ξ , se valgono le condizioni 2.22 e 2.23 si ha $V_{ijkl} \approx \lambda \delta_\xi$, altrimenti $V_{ijkl} \approx 0$. A causa di queste due restrizioni per un autostato α a temperatura T vale $z_\alpha \approx \frac{T}{\delta_\xi}$. Nel modello di Anderson $z = 2d$. Quindi l'analogia suggerisce di definire una dimensione locale $d_\alpha \propto \frac{T}{\delta_\xi}$. L'analogia tra localizzazione sul reticolo di Anderson e localizzazione a molti corpi risulta essere

$$\left\{ \begin{array}{ll} W \longleftrightarrow \delta_\xi & \text{tipica differenza in energia tra primi vicini} \\ t \longleftrightarrow \lambda \delta_\xi & \text{tipico termine di hopping} \\ 2d \longleftrightarrow \frac{T}{\delta_\xi} & \text{numero di primi vicini} \\ \text{loc. di Anderson} \longleftrightarrow & \text{loc. nello spazio di Fock (MBL)} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Nel caso di sistemi a molti corpi, utilizzando la 2.24, l'eq 2.3 si traduce nella condizione

$$\frac{\lambda T}{\delta_\xi} \log \frac{1}{\lambda} \approx 1 \quad (2.25)$$

Questo identifica un valore $T_c \approx \frac{\delta_\xi}{\lambda |\log \lambda|}$ per la transizione nello spazio di Hilbert. Sopra T_c si ha una delocalizzazione nello spazio di Fock che permette al sistema di trasportare le quantità conservate, mentre sotto T_c il sistema è localizzato nello spazio di Fock ed è un isolante. L'andamento qualitativo della conducibilità del sistema è riportato in Figura 2.2. La temperatura a cui avviene la transizione MBLD corrisponde ad un'energia estensiva che prende il nome di mobility edge a molti corpi. La predizione teorica è quindi che variando l'energia degli stati considerati il sistema può passare da un comportamento termico ad un comportamento MBL.

Poiché la localizzazione di Anderson può dipendere dalla forma specifica del reticolo (o grafo), la formula 2.25 potrebbe a priori non essere corretta. Il ragionamento però può essere reso più formale. Per formalizzare il ragionamento supponiamo di perturbare localmente un autostato $|\psi_k\rangle$ ad un tempo t_0 . Se il sistema rilassa questa perturbazione deve poter decadere in infiniti stati finali, al contrario se il sistema non è MBL le eccitazioni rimangono localizzate e possono decadere in pochi stati finali. La distribuzione di probabilità del rate di rilassamento inelastico delle quasi particelle Γ_k distingue quindi le due fasi del sistema. Studiando questo a tutti gli ordini della teoria perturbativa, Basko, Alenier e Altshuler [48] hanno dimostrato che il sistema è MBL sotto la temperatura

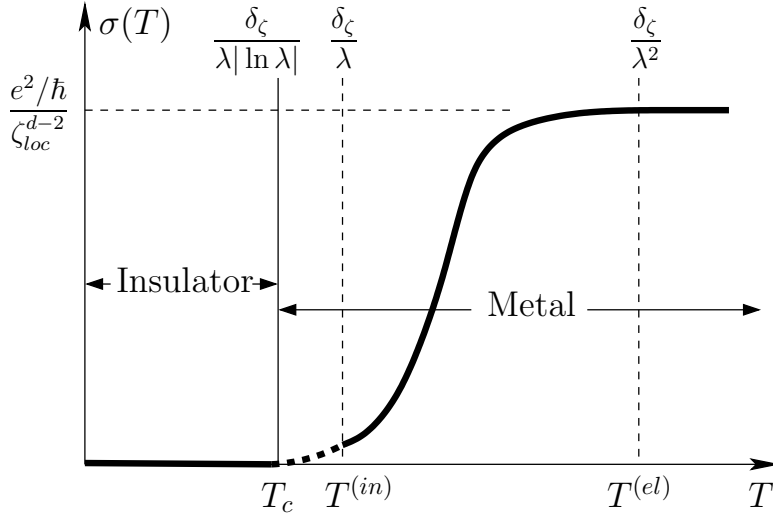


FIGURA 2.2: Conducibilità elettrica per un sistema di elettroni debolmente interagente. [46]

critica T_c la cui stima è data dall'eq 2.25.

I risultati perturbativi di Basko et al. sono un ottimo punto di partenza per studiare la localizzazione ma non danno informazioni su quello che accade per interazioni forti e lasciano aperta la possibilità della comparsa di conducibilità dovuta a termini non perturbativi di una localizzazione asintotica come presentato in [49]. Negli ultimi anni, vari argomenti sono stati proposti a supporto della localizzazione a molti corpi. L'esistenza della localizzazione a molti corpi è stata dimostrata rigorosamente per un particolare modello di spin interagenti [50]. Inoltre, nell'ultimo decennio, un ingente numero di studi numerici ha confermato l'esistenza della localizzazione per diversi modelli di spin-1/2 fortemente interagenti. Questi studi hanno anche stabilito che la localizzazione in sistemi in cui il disordine è elevato può persistere su tutto lo spettro. In alcuni sistemi interagenti infatti l'intero spettro risulta essere localizzato [51][52][53]. Oltre agli argomenti teorici, la localizzazione a molti corpi ha trovato una recente conferma sperimentale.

2.3 Osservazioni sperimentali della MBL

I sistemi di atomi freddi intrappolati in reticoli ottici sono da tempo uno dei migliori apparati in cui studiare la localizzazione. In questi sistemi è possibile controllare con estrema precisione l'intensità dell'interazione delle particelle (λ) e il disordine (W), che sono i parametri dell'Hamiltoniana che governano la transizione MBLD.

Il primo impiego efficiente di questi sistemi come simulatori quantistici è riconducibile al lavoro sperimentale di Greiner et al. nel 2002 [22][54]. Da allora sono stati svolti vari esperimenti con atomi freddi anche per sistemi disordinati. Le tecniche principali utilizzate per introdurre il disordine nei reticoli ottici sono due, riassunte in [55]. La prima prevede l'utilizzo di diffusori su cui i fasci laser scatterano in maniera random. Il fascio diffuso viene poi indirizzato sul reticolo dove, avendo diverse intensità di radiazione a seconda della posizione, genera un potenziale random detto anche “speckle potential”. La seconda tecnica consiste nell'utilizzare due fasci laser contropropaganti con una lunghezza d'onda incommensurabile rispetto al passo reticolare, in questo modo si genera un potenziale quasi random (es. modello di Aubry André).

Osservare il fenomeno della localizzazione a molti corpi sperimentalmente non è di facile realizzazione perché le interazioni del sistema con componenti esterne competono a distruggere il fenomeno. Nonostante questo, utilizzando il metodo dei potenziali quasi-random, la fase MBL è stata recentemente osservata in un sistema fermionico di atomi freddi [56]. In questo esperimento, viene realizzato un sistema quasi-unidimensionale costituiti da atomi di potassio ^{40}K a temperatura $\frac{T}{T_F} = 0.24$, ottenuto con una trappola ottica. A causa della struttura iperfine i due stati ad energia più bassa per il ^{40}K sono $|F, m_F\rangle = |\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\rangle = |\downarrow\rangle$ e $|\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\rangle = |\downarrow\rangle$. Il sistema è preparato in una mistura 50% $|\downarrow\rangle$ e 50% $|\uparrow\rangle$. Il sistema può essere descritto da un modello interagente con Hamiltoniana

$$H = -J \sum_{i,\sigma} \left(c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + h.c. \right) + \Delta \sum_{i,\sigma} \cos(2\pi\beta i + \phi) c_{i,\sigma}^+ c_{i,\sigma} + U \sum_i n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow} \quad (2.26)$$

dove $c_{i,\sigma}$ e $c_{i,\sigma}^+$ sono operatori di creazione e distruzione dei fermioni su sito i -esimo, σ indica lo stato spin del sistema e può valere $\sigma = |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$. I parametri J, Δ, ϕ possono essere controllati cambiando le fasi relative e la profondità dei potenziali sui due reticoli, β è il rapporto incommensurabile tra la lunghezza d'onda dei reticoli. In assenza di interazioni (ovvero $U = 0$) l'eq 2.26 descrive il modello Aubry-André in una dimensione. Questo modello ha un comportamento simile al modello di Anderson. Per $\frac{\Delta}{J} > 2$ gli autostati di singola particella del sistema sono localizzati. Gli studi numerici [57] suggeriscono che la presenza di una fase MBL, anche in presenza di interazioni forti, in cui lo spettro del sistema risulta interamente localizzato.

Per un sistema di particelle è possibile definire una quantità che quantifica l'asimmetria

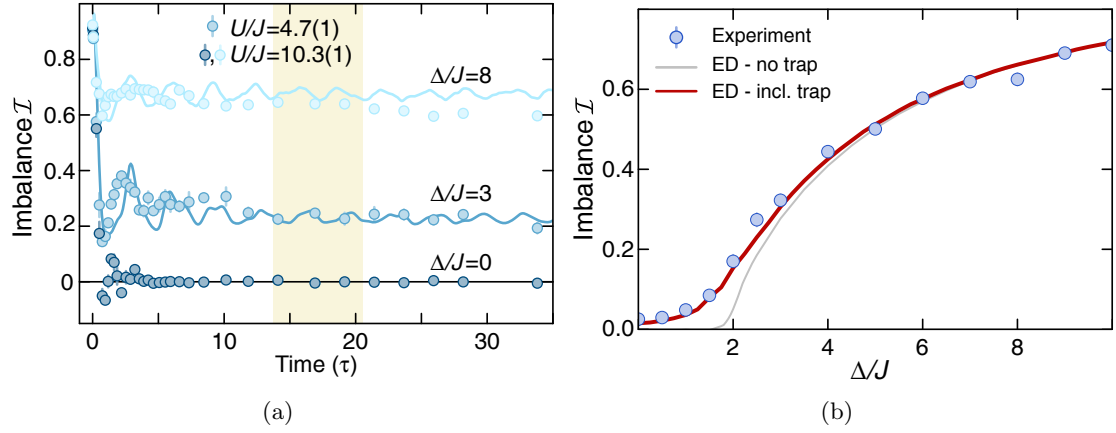


FIGURA 2.3: In (a) è riportata l'evoluzione temporale dello sbilanciamento del sistema per vari valori dei parametri dell'Hamiltoniana. I punti rappresentano i dati sperimentali, mentre le linee continue rappresentano le previsioni teoriche ottenute tramite DMRG. In (b) è raffigurata lo sbilanciamento in funzione dell'intensità del potenziale quasi-random Δ . Le linee continue rappresentano le previsioni teoriche ottenute tramite diagonalizzazione esatta (ED), contando o escludendo correzioni dovute alla trappola ottica. Figura presa da [56].

della distribuzione delle particelle come segue

$$\mathcal{I} = \frac{N_p - N_d}{N_p + N_d} \quad (2.27)$$

dove N_d, N_p sono rispettivamente il numero di particelle su siti in posizione dispari e pari. Questa quantità viene chiamata sbilanciamento. Dalla 2.27 si ha che $-1 \leq \mathcal{I} \leq 1$. I valori $\mathcal{I} = 1$ e $\mathcal{I} = -1$ si hanno rispettivamente quando gli atomi sono tutti in posizioni pari e quando sono tutti in posizioni dispari, che sono stati di estremo non equilibrio per il sistema, mentre si ha $\mathcal{I} = 0$ per $N_p = N_d$. Se il sistema è in una fase ergodica $\mathcal{I}(t)$ deve necessariamente rilassare al valore di equilibrio ovvero $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{I}(t) = 0$ indipendentemente dallo stato iniziale. Se invece il sistema si trova in una fase MBL il valore stazionario di $\mathcal{I}(t)$ dipende dallo stato iniziale del sistema.

Nell'esperimento il sistema, inizializzato in uno stato lontano dall'equilibrio ($\mathcal{I}(t=0) \gtrsim 0.9$), viene fatto evolvere temporalmente fino al raggiungimento di uno stato stazionario e, tramite misure di tempo di volo, ne viene misurato sbilanciamento. La Figura 2.3 riporta i dati sperimentali ottenuti dalle immagini di assorbimento. Nella fase MBL il valore stazionario dello sbilanciamento $\bar{\mathcal{I}}$ è ragionevolmente vicino a quello iniziale e si ha $\bar{\mathcal{I}} > 0$, questo permette di utilizzare $\bar{\mathcal{I}}$ come parametro d'ordine per la transizione MBLD. I risultati sperimentali ottenuti rilevano l'esistenza di una fase MBL e sono in accordo con le predizioni numeriche ottenute tramite diagonalizzazione esatta e tDMRG.

2.4 Proprietà dei sistemi MBL

Nelle sezioni precedenti abbiamo discusso l'esistenza dei sistemi MBL arrivando a concludere che pur non essendo stata dimostrata in maniera rigorosa, ci sono molte prove a suo supporto. In questo capitolo assumeremo l'esistenza del fenomeno della localizzazione, e indagheremo le proprietà ad essa associate. Infatti la MBLD è una transizione di fase dinamica quindi le usuali quantità termodinamiche non distinguono tra le due fasi.

Nonostante la localizzazione a molti corpi sia stata introdotta per descrivere le proprietà di conduzione degli elettroni nei sistemi in cui le interazioni tra questi sono apprezzabili, oggi il fenomeno ha una connotazione molto più generale legata all'assenza di termalizzazione. La localizzazione a molti corpi può essere definita come una fase distinta della materia con le seguenti caratteristiche [58]:

1. Vi sono osservabili localmente accessibili che non rilassano verso l'equilibrio, a cui corrispondono integrali del moto quasi locali[49][59][50]
2. L'informazione sullo stato iniziale del sistema persiste per tempi arbitrariamente lunghi ed è recuperabile tramite operazioni locali[60][61]
3. L'evoluzione temporale porta ad una crescita delle correlazioni logaritmica nel tempo [51][33][49]

Sottolineiamo inoltre che la definizione della localizzazione a molti corpi non si basa sull'annullarsi di una qualche conducibilità del sistema, o su un concetto di località spaziale. L'annullarsi delle conducibilità continue (conducibilità DC) in sistemi con quantità estensive locali conservate è una conseguenza della localizzazione a molti corpi ma non definisce il fenomeno. Infatti la localizzazione a molti corpi è stata testata anche in sistemi dove l'energia non si conserva e non vi sono quantità da trasportare se non l'informazione, un esempio sono i sistemi in cui l'Hamiltoniana è periodica nel tempo (sistemi di Floquet) [62][63].

La definizione data è quindi dinamica ma si riflette direttamente sulle proprietà degli autostati dell'Hamiltoniana. Nei sistemi MBL gli autostati violano l'ETH. Questo permette di distinguere la fase localizzata da quella delocalizzata (o termalizzante) con l'uso di indicatori spettrali.

Lo spaziamiento tra livelli energetici adiacenti dello spettro (vedi Appendice A), che indichiamo con s , permette di distinguere la fase delocalizzata da quella MBL. Nella fase delocalizzata i livelli adiacenti si respingono e la probabilità di avere una degenerazione nello spettro è nulla perché queste corrisponderebbero a gruppi di simmetria addizionali per il sistema che non hanno motivo di esistere. Nella fase localizzata invece i livelli sono scorrelati perché gli autostati localizzati in punti distanti non risentono l'uno dell'altro quindi si possono avere degenerazioni. In Appendice A è discussa la forma della distribuzione degli spaziamenti $P(s)$ nelle due diverse fasi. Si ha che $P(s)$ è data da

$$\begin{cases} P(s) = P_P(s) \equiv \frac{1}{s} e^{-\frac{s}{\langle s \rangle}} & \text{nella fase MBL} \\ P(s) = P_{GOE}(s) \approx \frac{\pi s}{2\langle s \rangle^2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4\langle s \rangle^2}\right) & \text{nella fase delocalizzata} \end{cases} \quad (2.28)$$

dove $\langle s \rangle$ indica la media di s , $P_P(s)$ è la distribuzione associata alla statistica Poissoniana che descrive i livelli di sistemi con spettro scorrelato, $P_{GOE}(s)$ è quella associata alla statistica del Ensemble Gaussiano Ortonormale (GOE) che descrive i sistemi generici con spettro correlato.

La transizione MBLD può essere individuata anche studiando la transizione da legge dell'area a legge del volume per l'entropia di entanglement degli autostati del sistema (vedi Appendice B). In un sistema d -dimensionale, consideriamo una bipartizione geometrica in una regione A contenente ℓ^d gradi di libertà e B che contiene il restante. Indichiamo con $S_\alpha(\ell, e)$, l'entropia di entanglement di bipartizione del sistema disordinato in una configurazione di disordine α , su un autostato che ha densità di energia e , in un volume la cui dimensione lineare è ℓ . Mentre con $\langle S \rangle(\ell, e)$ indichiamo la media su α di $S_\alpha(\ell, e)$. Considerando il limite termodinamico su B , in presenza di una mobility edge e_c , l'andamento dell'entropia media su A in funzione delle dimensioni di A , come discusso in Appendice B, è

$$\begin{cases} \langle S \rangle(\ell, e) \approx s_{loc}(e) \ell^{d-1} & \text{se } e < e_c \\ \langle S \rangle(\ell, e) \approx s_{th}(e) \ell^d & \text{se } e > e_c \end{cases} \quad (2.29)$$

dove abbiamo introdotto la densità di entropia all'equilibrio termico s_{th} , e l'entropia s_{loc} per unità di superficie nella fase localizzata. Determinare l'andamento di $\langle S \rangle(\ell, e_c)$ numericamente non è facile perché in generale il punto di transizione non è noto. Sotto l'assunzione di una transizione MBLD continua è possibile determinare teoricamente

l'andamento di $\langle S \rangle(\ell, e_c)$ [64]. Per definizione la transizione si dice continua se in entrambe le fasi del sistema esiste una scala ξ per cui l'entropia ha un comportamento critico solo se $\ell \ll \xi$, mentre per $\xi \ll \ell$ il comportamento è regolare. Dati due sottosistemi A_1 e A_2 l'entropia S di von Neumann soddisfa l'equazione

$$S(A_1) + S(A_2) \geq S(A_1 \cup A_2) + S(A_1 \cap A_2) \quad (2.30)$$

che prende il nome di forte subadditività. Applicando la 2.30 a due insiemi uguali, di lunghezza ℓ e ottenibili l'uno dall'altro tramite una traslazione di $\delta\ell$, si ottiene

$$2S_\alpha(\ell, e) \geq S_\alpha(\ell + \delta\ell, e) + 2S_\alpha(\ell - \delta\ell, e) \quad \forall \delta\ell < \ell. \quad (2.31)$$

Nel limite $\delta\ell \rightarrow 0$, facendo una media sul disordine, otteniamo che

$$\frac{\partial^2 \langle S \rangle}{\partial \ell^2} \leq 0 \quad (2.32)$$

questo significa che l'entropia media è una funzione concava di ℓ . Consideriamo il caso $d = 1$ (che è quello che abbiamo studiato nelle simulazioni), ci sono tre scenari possibili per l'andamento di $\langle S \rangle(\ell, e_c)$ [64].

- 1) $\langle S \rangle(\ell, e_c) \approx \text{const.}$: questo implicherebbe che nella fase ergodica si abbia $\frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \ell}(\ell \ll \xi, e_c^-) = 0$ e $\frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \ell}(\ell \gg \xi, e_c^-) = s_{th} > 0$. La concavità impedisce alla derivata dell'entropia di essere crescente.
- 2) $\langle S \rangle(\ell, e) \approx s_0 \ell^a$ o (logaritmico): questo implicherebbe che $\frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \ell}(\ell \ll \xi, e) \approx s_0 a \xi^{a-1}$. Dal lato ergodico si ha $\frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \ell}(\ell \gg \xi, e_c) = s_{th}$ che, usando la decrescenza della derivata, implica $s_{th} \lesssim \xi^{a-1}$. Poiché alla transizione ($e \rightarrow e_c$) la lunghezza ξ diverge, avere $a < 1$ implicherebbe $s_{th}(e_c) = 0$. che è assurdo. Ponendo $a = 1$ questo ragionamento esclude anche gli andamenti logaritmici tipici delle transizioni di fase quantistiche.
- 3) $\langle S \rangle(\ell, e_c) \approx s_0 \ell$: questo andamento corrisponde ad una legge del volume per l'entropia anche alla transizione e non può essere escluso a priori.

Concludiamo che per $e = e_c$ l'unico andamento possibile per l'entropia è quello che corrisponde ad una legge del volume analoga a quella rispettata nella fase ergodica. In

dimensione arbitraria si ha

$$\langle S \rangle (\ell, e_c) \approx s_0 \ell^d \quad (2.33)$$

2.4.1 Integrali del moto locali nella fase MBL

Nel Capitolo 1 abbiamo introdotto il concetto di osservabili locali e discusso la loro importanza nel processo di termalizzazione. Le osservabili locali giocano un ruolo molto importante anche nella descrizione dei sistemi MBL permettendo di descrivere in modo universale la fase MBL.

Nei sistemi MBL l'assenza di trasporto delle quantità conservate suggerisce l'esistenza di integrali del moto locali, detti anche Local Integrals of Motion (LIOM). Consideriamo nuovamente il modello di fermioni interagenti descritti dall'Hamiltoniana di eq 2.11. In assenza di interazioni ($\lambda = 0$) i numeri di occupazione $n_m = d_m^\dagger d_m$ sono integrali del moto commutanti a spettro binario dati da

$$n_m = \sum_{i,j} \phi_m^*(j) \phi_m(i) c_i^\dagger c_j. \quad (2.34)$$

Poiché il sistema è, per ipotesi, AL a tutte le energie, questi sono tutti operatori quasi locali nello spazio reale. Infatti, sviluppando in una qualsiasi base ortonormale di operatori prodotto su singolo sito, il contributo di termini che coinvolgono siti distanti R dal centro di localizzazione decade esponenzialmente all'aumentare di R . Il set di integrali del moto è completo, ovvero ogni stato del sistema può essere indicizzato dai numeri di occupazione in modo biunivoco. Poiché lo spettro degli n_i è binario, utilizzando la trasformazione $\tau_i^z = 2n_i - 1$, l'Hamiltoniana assume la forma

$$H = \sum_i \epsilon_i \tau_i^z \quad (2.35)$$

Le matrici τ_i^z possono essere interpretate come matrici di Pauli che agiscono su gradi di libertà spazialmente separati. L'Hamiltoniana risulta quindi una somma di osservabili di spin locali, la cui dinamica è uguale a quella di 1.18. Come abbiamo già discusso i gradi di libertà di spin di eq 2.35 evolvono coerentemente e senza dissipazione o dephasing.

In [50] Imbrie ha mostrato che, in un particolare modello disordinato di spin-1/2 interagenti, nella fase localizzata rimane possibile trovare un set completo di LIOM commutanti con spettro binario. L'esistenza di questi LIOM è stata argomentata nel caso più generale da Oganesyan e Huse [65] ed è stata utilizzata con successo per spiegare le proprietà dei sistemi MBL trovate numericamente.

Per essere più concreti e semplificare la notazione consideriamo un modello di N spin-1/2 su reticolo. Questi spin $\vec{\sigma}_i$ rappresentano i gradi di libertà fisici del sistema, sono detti p -bits (physical-bits) e risultano convenienti per esprimere osservabili accessibili in laboratorio come l'Hamiltoniana del sistema, che solitamente risulta avere solo interazioni a primi vicini. Se il disordine è sufficientemente elevato è possibile che il sistema entri in una fase in cui la localizzazione persiste a tutte le energie detta fase Fully MBL (FMBL). In questa fase, in modo analogo all'isolante di Anderson, l'assenza di trasporto a tutte le energie può essere spiegata ipotizzando l'esistenza di gradi di libertà di spin τ_i quasi locali nello spazio reale, detti l -bits (local-bits). Una trasformazione unitaria U quasi-locale (che genera poco entanglement tra i gradi di libertà del sistema lega i p -bits agli l -bits $\vec{\tau} = U^\dagger \vec{\sigma} U$. L'Hamiltoniana in funzione degli l -bits generalizza l'eq 2.35 e assume la forma

$$H = \sum_i h_i \tau_i^z + \sum_{i < j} J_{ij} \tau_i^z \tau_j^z + \sum_{i < j < k} K_{i,j,k} \tau_i^z \tau_j^z \tau_k^z + \dots \quad (2.36)$$

dove $\vec{\tau}_i$ sono le matrici di Pauli che agiscono sull' i -esimo l -bit, ad H è stata sottratta un costante per renderla a traccia nulla, i coefficienti locali $h_i, J_{ij}, J_{i_1 \dots i_n}$ sono variabili random la cui distribuzione dipende dal disordine sugli nel sistema di p -bits. I termini

$$J_{ij} = \frac{1}{2L^d} \text{Tr}(\tau_i \tau_j H) \propto \exp\left(-\frac{|i-j|}{\xi_J}\right) \quad (2.37)$$

$$K_{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{2L^d} \text{Tr}(\tau_{i_1} \dots \tau_{i_n} H) \propto \exp\left(-\frac{\max |i_\alpha - i_\beta|}{\xi_{K_n}}\right) \quad (2.38)$$

rappresentano interazioni tra gli l -bits e, poiché l'Hamiltoniana è locale nello spazio reale, le interazioni tra gli l -bits distanti sono dovute alle code esponenziali degli operatori e devono necessariamente (con probabilità unitaria) decadere esponenzialmente con la distanza massima tra gli l -bits coinvolti nella traccia. Le lunghezze su cui avviene il decadimento ξ_J e ξ_{K_n} , sono in generale diverse a seconda del numero di l -bits coinvolti nell'interazione e non coincidono quindi con la lunghezza di localizzazione del

sistema. Poiché H in eq 2.36 dipende solo dai τ^z , questi, commutando con essa, sono quantità conservate. La possibilità di trovare un numero estensivo LIOM accomuna i sistemi MBL a quelli integrabili ma, mentre nei primi moltiplicando i τ_i^z è possibile ottenere un numero di LIOM esponenziale in L^d , nei secondi moltiplicando gli integrali del moto si ottengono in generale osservabili non locali. L'Hamiltoniana di eq 2.36 è la diretta generalizzazione di eq 2.35 al caso interagente, qui infatti gli l -bits possono anche interagire tra di loro. La dinamica degli l -bits quindi porta al dephasing ma non alla dissipazione, in accordo con il fatto che per sistemi MBL i coefficienti di diffusione e conducibilità DC sono nulli [66], mentre gli operatori locali rilassano comunque ad un ensemble diagonale [59].

L'eq 2.36 può essere utilizzata per interpretare numerosi aspetti della dinamica nei sistemi FMBL. Consideriamo la propagazione dell'entanglement nei sistemi FMBL. Supponiamo di aver preparato il sistema in uno stato $|\psi(0)\rangle$ prodotto dei p -bits e di lasciare evolvere il sistema. Per costruzione l'entropia di entanglement di $|\psi(0)\rangle$ in termini di p -bits è nulla, mentre in termini degli l -bits in generale si può avere un'entropia che segue una legge dell'area. Scomponiamo $|\psi(0)\rangle$ in stati prodotti di l -bits, ciascuno di questi segue una legge dell'area in termini di p -bits ma, a causa della coerenza dei coefficienti della scomposizione, $|\psi(0)\rangle$ non è entangled. Se il sistema viene lasciato evolvere, in un primo tempo transiente il dephasing rompe la coerenza dello stato iniziale, portando ad una legge dell'area per l'entropia nello stato $|\psi(t)\rangle$. Eliminata la coerenza iniziale il contenuto in entanglement del sistema in termini di p -bits è approssimativamente descritto da quello in termini di l -bits e possiamo studiare il sistema utilizzando l'eq 2.36. In un sistema termalizzante, dati tre p -bits l'interazione p_1, p_2 e p_3 , i termini di interazione tra p_1 - p_2 , e quelli tra p_2 - p_3 possono entanglare gli stessi p_1 e p_3 , pur in assenza di un'interazione diretta. Questo porta ad una propagazione balistica dell'entropia nei sistemi termalizzanti in cui i bound di Lieb-Robinson sono saturati da una crescita lineare dell'entropia. In un sistema AL, dopo il tempo transiente, gli l -bits non interagiscono e l'entanglement non può crescere ulteriormente. Nei sistemi FMBL l'interazione tra gli l -bits porta ad una seconda fase di crescita dell'entanglement. Differentemente dal caso termalizzante, due l -bits possono essere entangled solo tramite interazione diretta. L'

interazione è mediata da un accoppiamento efficace

$$J_{ij,\psi}^{eff} = J_{ij} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{\{i_1 \dots i_n\} \ni i,j} K_{i_1 \dots i_n} \langle \psi(0) | \tau_i \tau_j \tau_{i_1} \dots \tau_{i_n} | \psi(0) \rangle \propto \quad (2.39)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{|i-j|}{\xi_\psi}\right) \quad (2.40)$$

che decade esponenzialmente con la distanza $r = |i-j|$ tra gli l -bits e dipende dalla configurazione iniziale di tutti gli altri l -bits. In particolare la lunghezza di decadimento ξ_ψ dipende dallo stato $|\psi(0)\rangle$. Il termine di interazione darà contributi non trascurabili all'evoluzione temporale quando $tJ^{eff}(r) \approx 1$ ovvero $r \approx \xi_\psi \log(t)$. Quindi al tempo t l'entanglement si è propagato solo su un volume $r^d \approx \xi_\psi^d \log^d(t)$. Di conseguenza l'entropia di entanglement nei sistemi FMBL propaga in maniera logaritmica nel tempo, molto più lentamente del caso termico ed il valore di saturazione della densità di entropia (non valendo l'ETH) è in generale minore di quello termodinamico. Questo comportamento è stato riscontrato nelle simulazioni numeriche. Oltre a spiegare elegantemente la crescita logaritmica dell'entropia e l'annullarsi dei coefficienti di trasporto DC, la fenomenologia degli l -bits si è rivelata utile a prevedere nuovi fenomeni come il fatto che le fluttuazioni temporali di osservabili locali O nei p -bits decadono nel tempo con una legge di potenza $|O(t) - \overline{O}| \propto \frac{1}{t^b}$ [59]. Il successo nel confronto con i dati numerici, ottenuti da vari modelli, suggerisce che la dinamica dei sistemi FMBL è efficacemente descritta dall'Hamiltoniana universale di eq 2.36. In Appendice C è discussa come la forma universale di eq 2.36 implichi la possibilità di recuperare l'informazione immagazzinata in sistemi FMBL.

Nel caso di interazioni deboli gli l -bits possono essere esplicitamente costruiti in maniera perturbativa rivestendo i σ_z nel caso libero e imponendo che ad ogni ordine della teoria perturbativa i LIOM commutino tra loro e con l'Hamiltoniana, questo tipo di costruzione è stata effettuata con successo in [66]. Per una discussione della costruzione teorica non perturbativa dei LIOM associati agli l -bits rimandiamo a [67][66][50][68]. Una delle varie possibilità proposte consiste nel considerare medie temporali di operatori localizzati. Consideriamo un generico operatore O localizzato in prossimità di un sito i_O , in rappresentazione di Heisenberg si ha

$$\overline{O} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{+\frac{i}{\hbar} H t} O e^{-\frac{i}{\hbar} H t} dt. \quad (2.41)$$

In generale \overline{O} risulta sempre un integrale del moto, ed in quanto tale è esprimibile (come

H) in termini dei soli τ_i^z

$$\bar{O} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1 \dots i_n} O_{i_1 \dots i_n} \tau_{i_1} \dots \tau_{i_n} \quad (2.42)$$

$$O_{i_1 \dots i_n} = 2^{-L^d} \text{Tr}(\tau_{i_1} \dots \tau_{i_n} O) \propto \exp\left(-\frac{\max(|i_\alpha - i_\beta|, |i_\alpha - i_O|)}{\xi_{O_n}}\right) \quad (2.43)$$

dove rispetto all'eq 2.37 i coefficienti decadono esponenzialmente anche allontanandosi da i_O perché O è localizzato. Così facendo è possibile definire un LIOM partendo da un operatore localizzato qualsiasi. Suddividendo l'Hamiltoniana in più componenti locali, si può applicare la procedura di eq 2.41 per ottenere

$$H = \sum_i \bar{H}_i \quad (2.44)$$

dove, similmente ai τ_i^z , gli \bar{H}_i corrispondono a operatori esponenzialmente localizzati su pochi siti. Questa costruzione ha il pregio di essere semplice e generale ma la possibilità di migliorarla ulteriormente per definire operatori a spettro binario, rimane ancora una questione aperta.

Capitolo 3

Localizzazione a molti corpi in una catena di Bosoni

Negli ultimi anni la localizzazione a molti corpi è stata studiata estensivamente solo in sistemi fermionici o di spin. Nonostante ciò, essendo un fenomeno che avviene ad alte energie, non ci aspettiamo che la localizzazione sia dettata dalla statistica delle particelle. In una dimensione (1D), la localizzazione di bosoni debolmente interagenti è stata studiata per la prima volta nel 2010 da Aleiner et al. [69], che hanno portato argomenti perturbativi a supportare dell'esistenza di una fase MBL. Il caso bosonico è stato studiato poco in letteratura [70][71][72] poiché, da un punto di vista numerico, risulta più difficile da trattare, in quanto lo spazio di Hilbert è di dimensione maggiore.

Lo studio analitico della localizzazione a molti corpi è fortemente basato su un approccio perturbativo al fenomeno. Con questo approccio non è possibile esplorare il regime di sistemi fortemente interagenti, dove la teoria perturbativa non converge (o dà risultati non attendibili). Gli studi numerici hanno invece il vantaggio di poter esplorare anche questo regime. Inoltre questi ultimi, riferendosi a modelli ben precisi, possono dare risultati quantitativi, soggetti a possibili verifiche sperimentali successive. Per questa ragione abbiamo deciso di studiare numericamente la localizzazione a molti corpi nel modello bosonico.

In questa sezione è riportato lo studio di un modello 1D di bosoni fortemente interagenti ai fini di stabilire se effettivamente anche questi possono localizzare in presenza di disordine, e determinare alcuni indicatori adatti ad un successivo studio quantitativo della

transizione MBLD. Questo modello è particolarmente interessante in quanto si presta bene a verifiche sperimentali in sistemi di atomi freddi su reticolo ottico.

In seguito verrà descritto in dettaglio il modello effettivo utilizzato nell'analisi della MBL, sottolineando il suo legame con la fisica degli atomi freddi e ricavando come i suoi parametri sono legati a quantità tunabili in esperimenti.

3.1 Il modello Bose Hubbard per atomi freddi - reticolo ottico

Il modello che studiamo è un sistema di bosoni di spin zero (spinless) confinati a muoversi in un potenziale 1D esterno $V_{ext}(x)$, sovrapposto all'usuale potenziale reticolare $V_{ret}(x)$. Assumiamo che $V_{ext}(x)$ abbia una componente random, che induce disordine nel sistema. Questo sistema può essere realizzato caricando atomi freddi in un reticolo ottico a simmetria cilindrica che li confina lungo l'asse del cilindro creando un sistema quasi-1D, i potenziali V_{ret} e V_{ext} emergono dall'interazione con il campo elettrico del reticolo che è generato creando un'onda stazionaria con fasci laser contropropaganti lungo l'asse del cilindro [20].

L'Hamiltoniana che governa il moto di questi sistemi in seconda quantizzazione è data da

$$H = \int dx \psi^\dagger(x) \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{2m} + V_{ret}(x) + V_{ext}(x) \right] \psi(x) + \int dx dx' \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x') V_{int}(x - x') \psi(x) \psi(x') \quad (3.1)$$

dove m è la massa dei bosoni, V_{ret} è un potenziale di periodicità a_{ret} , V_{ext} è un potenziale esterno controllabile che contiene una componente random e una componente che confina il moto in regione di spazio $0 < x < L$, V_{int} un'interazione a corto raggio tra i bosoni che consideriamo repulsiva, $\psi(x)$ è l'operatore di campo bosonico.

Quando il potenziale V_{ret} è molto profondo è conveniente proiettare gli operatori di campo sulla base degli orbitali di Wannier $w_0(x)$ della banda di energie inferiore, che

per basse temperature è l'unica a contribuire [20].

$$\psi \approx \sum_{i=1}^{\frac{L}{a_{ret}}} w_0(x - ia_{ret}) b_i \quad (3.2)$$

dove b_i, b_i^+ sono operatori distruzione e creazione bosonici che soddisfano le usuali regole di commutazione, $\frac{L}{a_{ret}}$ è il numero di siti accessibili del reticolo. Proiettata sulla banda inferiore, l'Hamiltoniana diventa

$$H = - \sum_{i,j=1}^{\frac{L}{a_{ret}}} t_{ij} b_i^+ b_j + \sum_{i,j,k,l=1}^{\frac{L}{a_{ret}}} V_{ij,kl} b_i^+ b_j^+ b_k b_l \quad (3.3)$$

Se V_{ret} è sufficiente profondo le funzioni di Wannier $w_0(x - ia_{ret})$ sono fortemente localizzate attorno al punto ia_{ret} , e se la lunghezza di localizzazione è molto minore di quella di interazione, l'Hamiltonia 3.3 può essere semplificata ulteriormente facendo un'approssimazione a primi vicini su t_{ij} ($t_{ij} = t$ per i e j primi vicini, $t_{ij} = 0$ altrove), e un'approssimazione a interazione di contatto per $V_{ij,kl}$ ($V_{ij,kl} \neq 0 \iff i = j = k = l$). Queste semplificazioni portano al modello di Bose Hubbard in 1D [73][74]

$$H = -t \sum_{i=1}^L (b_i b_{i+1}^+ + h.c.) + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^L n_i (n_i - 1) - \sum_{i=1}^L (\mathcal{E}_i + \mathcal{E}) n_i \quad (3.4)$$

dove n_i è il numero di occupazione per il sito i -esimo, t è il parametro di Hopping, U misura l'intensità dell'interazione, \mathcal{E} e \mathcal{E}_i sono rispettivamente la componente uniforme e variabile del potenziale chimico sul sito i -esimo, L indica la lunghezza della catena che, avendo posto $a_{ret} = 1$, coincide con il numero di siti accessibili.

I parametri introdotti sono legati a quelli microscopici tramite [73]

$$\begin{aligned} t &= \int w_0(x) \left(-\hbar^2 \frac{\partial_x^2}{2m} + V_{ret}(x_i) \right) w_0(x - a_{ret}) dx \\ U &= \frac{4\pi\hbar^2 a_{sct}}{m} \int |w_0(x)|^4 dx \\ \mathcal{E}_i &= - \int w_0(x - ia_{ret}) V_{ext}(x) w_0(x - ia_{ret}) dx \\ \mathcal{E} &= \int w_0(x) \left[-\frac{\partial_x^2}{2m} + V_{ret}(x) \right] w_0(x) dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove a_{sct} è la lunghezza di scattering associata a $V_{int}(x)$. Il parametro t fissa la scala di energia del sistema, $\frac{U}{t}$ può essere controllato tramite risonanze di Feshbach [20], mentre

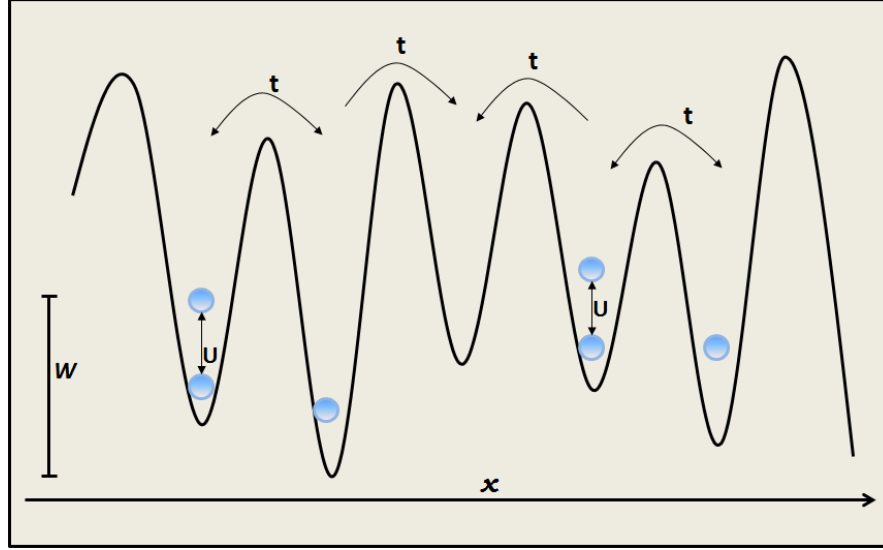


FIGURA 3.1: Rappresentazione grafica dei bosoni in un potenziale disordinato. Sono stati indicati i parametri dell'Hamiltoniana di Bose Hubbard (eq 3.4) introdotti nel testo. I bosoni sono confinati sui siti dal potenziale reticolare, a questo è sommato un potenziale disordinato di intensità W che rende il sistema aperiodico. I bosoni possono passare a siti adiacenti a causa del termine di hopping t , mentre solo i bosoni sullo stesso sito interagiscono dando origine al termine in U nell'Hamiltoniana da sito a sito.

i $\frac{\mathcal{E}_i}{t}$ dipendo dal potenziale esterno random quindi sono anch'essi variabili casuali. La distribuzione specifica di questi non influisce sulle proprietà fisiche del sistema, quindi per comodità qui consideriamo il caso in cui i \mathcal{E}_i sono variabili indipendenti, uniformemente distribuite nell'intervallo $[-W, W]$ con $W > 0$. Il parametro W misura il grado di disordine del sistema e prende il nome di intensità del disordine. In Figura 3.1 è raffigurato il sistema di Bose Hubbard disordinato.

La fase MBL non è una fase termodinamica, quindi non è descrivibile con un usuale ensemble statistico e la temperatura del sistema isolato non è ben definita. Come osservato nel Capitolo 3, la fase MBL è associata alle proprietà dello spettro a molti corpi del sistema. Poiché vogliamo descrivere le proprietà del sistema a diverse energie E dello spettro, assieme a $\frac{U}{t}, \frac{W}{t}$ è conveniente introdurre una variabile (indipendente dalla scala di energia) che descriva il punto dello spettro che intendiamo considerare

$$\epsilon(E) = \frac{2(E - E_{min})}{E_{max} - E_{min}} \quad (3.6)$$

dove E_{min} ed E_{max} sono il minimo e massimo autovalore dell'Hamiltoniana. E_{min} ed E_{max} esistono sempre perché, lavorando in spazi di Hilbert di dimensioni finite, l'Hamiltoniana è limitata quindi l'eq 3.6 è ben definita. L'energia ridotta ϵ indica la

posizione dello stato relativa agli estremi del sistema. Come l'usuale densità di energia, ϵ nel limite termodinamico è una grandezza intensiva perché rapporto di due quantità estensive. Inoltre ϵ ha il vantaggio di essere compresa tra 0 ed 2 per ogni realizzazione di disordine ed ogni L . In particolare il ground state ha sempre $\epsilon = 0$, mentre si ha $\epsilon = 1$ a centro banda (dove, se la temperatura è ben definita, si ha $T = \infty$ perché la densità di stati è massima).

Oltre all'energia, il sistema definito dall'eq 3.4 ha un'ulteriore quantità conservata $N = \sum_{i=1}^L n_i$ (il numero di bosoni nella catena). Lo studio del sistema può quindi essere effettuato separatamente per i vari settori dello spazio di Hilbert a filling $f = \frac{N}{L}$ costante. In questi sottospazi si ha che in 3.4 il termine $\mathcal{E} \sum_i n_i = \mathcal{E} L f$ diventa una costante additiva nell'Hamiltoniana. Poiché la fisica del sistema e l'energia ridotta sono insensibili alle costanti additive, una volta fissato f , siamo liberi di porre $\mathcal{E} = 0$.

La scala di energia può essere scelta in modo che $t = 1$. Infatti l'energia ridotta del sistema rimane invariata se l'Hamiltoniana viene moltiplicata per una costante λ che può essere scelta come $\lambda = \frac{1}{t}$. Quindi gli unici parametri macroscopici che descrivono l'Hamiltoniana del sistema sono U e W , mentre gli stati del sistema sono descritti dalle variabili f e ϵ .

Come già anticipato abbiamo deciso di studiare il modello di Bose Hubbard 1D nel regime di interazioni forti, ma prima di descrivere questo caso, analizzeremo i casi limite in cui il comportamento del modello è noto, o è già stato studiato in letteratura. Questi sono i tre casi: temperatura nulla $T = 0$, assenza di interazioni $U = 0$, repulsione infinita $U = \infty$.

- 1) Nel limite di $T = 0$ (o $\epsilon = 0$) le proprietà del sistema sono dettate dal ground state (GS) dell'Hamiltoniana. Modificando i parametri U, W le proprietà fisiche del GS cambiano drasticamente, permettendo di individuare tre fasi ben distinte (riportate in Figura 3.2):

- la fase Superfluida (SF), caratterizzato, in 1D, da correlazioni che decadono algebricamente, compressibilità finita ed assenza di gap.
- la fase Isolante di Mott (MI), caratterizzata da compressibilità nulla, correlazioni che decadono esponenzialmente, conducibilità nulla, e presenza di un gap.

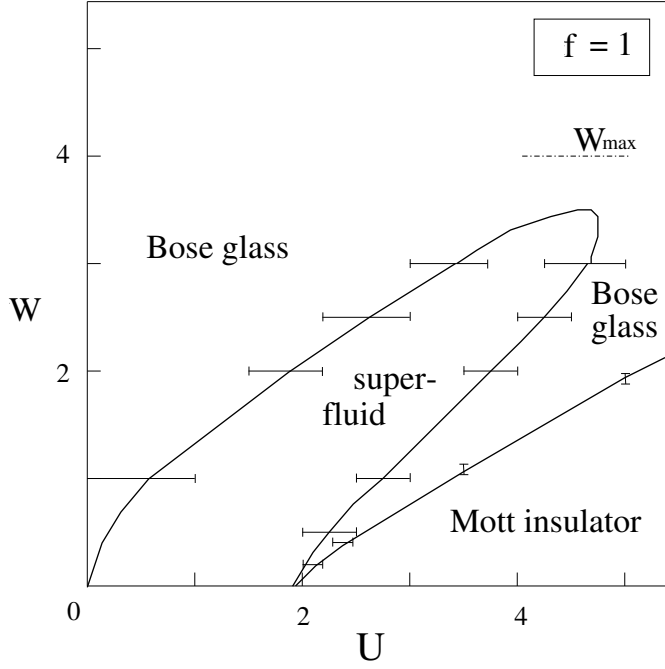


FIGURA 3.2: Diagramma di fase del modello 1D di Bose Hubbard disordinato a $T=0$. Sono fissati $t = 1$ e $f = 1$. Figura presa da [75].

- la fase di Bose Glass (BG), che separa le fasi MI e SF, in cui il sistema è un isolante gapless, con compressibilità finita e le correlazioni decadono solo algebricamente[74].

2) Nel caso limite di bosoni non interagenti ($U = 0$) l'Hamiltoniana diventa

$$H = -t \sum_{i=1}^L (b_i b_{i+1}^+ + h.c.) - \sum_{i=1}^L \mathcal{E}_i n_i \quad (3.7)$$

Nel calcolo degli autostati di singola particella la statistica delle particelle non interviene, quindi qualsiasi intensità di disordine $W \neq 0$ localizza tutti gli autostati come nei modelli fermionici 1D. In questo limite il sistema è localizzato secondo Anderson.

3) Nel limite $U = \infty$ la probabilità di trovare più bosoni per sito è nulla e lo spazio di Hilbert locale rimangono stati di numeri di occupazione $n_i = 0, 1$. In questo sottospazio il termine di interazione non contribuisce e l'Hamiltoniana 3.4 si riduce a

$$H = -t \sum_{i=1}^L (a_i a_{i+1}^+ + h.c.) - \sum_{i=1}^L \mathcal{E}_i n_i \quad (3.8)$$

dove a_i^+, a_i sono gli operatori di creazione e distruzione per bosoni impenetrabili e soddisfano le relazioni:

$$\begin{cases} [a_i, a_j] = [a_i, a_j^+] = 0 & \text{per } i \neq j \\ \{a_i, a_j\} = 0 \quad \{a_i, a_j^+\} = 1 & \text{per } i = j \end{cases}$$

L'Hamiltoniana 3.8 può essere mappata esattamente in un modello disordinato di fermioni non interagenti [76]. Usando l'eq 1.26 si ottiene che

$$H = -t \sum_{i=1}^L (c_i^+ c_{i+1} + h.c.) + \sum_{i=1}^L \mathcal{E}_i c_i^+ c_i \quad (3.9)$$

L'Hamiltoniana 3.9 è in una dimensione perciò localizza secondo Anderson per qualsiasi quantità di disordine. La localizzazione non dipende dalla particolare base scelta purché l'Hamiltoniana sia locale di conseguenza l'equazione 3.8 ha lo spettro completamente localizzato. In effetti possiamo verificare questo controllando alcuni indicatori della fase MBL. La statistica dei livelli risulta essere Poissoniana perché questa non viene variata dal mapping. Poiché $c_i^+ c_i = b_i^+ b_i$ la mancanza di raggiungimento del valore termico dei prodotti degli $c_i^+ c_i$ implica che vale lo stesso per i $b_i^+ b_i$. Questo porta ad un set di 2^L operatori locali indipendenti che non termalizzano. Questi due fatti confermano che effettivamente per $U = \infty$ il sistema è localizzato.

In generale uno dei limiti più forti alla simulazione numerica di un sistema quantistico sono le risorse computazionali finite che non permettono di studiare sistemi con spazi di Hilbert di dimensioni $d_{\mathcal{H}}$ arbitrariamente grandi. Infatti solo tenere in memoria (senza fare operazioni) l'Hamiltoniana di un sistema generico richiede $32d_{\mathcal{H}}^2$ bit (dove 32 bit è la dimensione tipica di un numero reale). Nel caso di sistemi bosonici questo numero cresce molto rapidamente con la taglia del sistema, per un'Hamiltoniana con L siti il numero di stati nel settore di filling f è $d_{\mathcal{H}}(L, f) = \binom{L(1+f)}{L}$. Per $f = 1, L = 10$ servono già più di 30 gigabyte. Date le dimensioni eccessive dello spazio di Hilbert, non è possibile studiare il modello di Bose Hubbard in generale. Quindi ci limitiamo allo studio nel limite di interazioni forti ma finite $1 \ll U \neq \infty$. In questo caso la probabilità di avere siti doppiamente occupati non è più nulla, ma quella di avere siti con tre bosoni rimane trascurabile. Nello spazio di Hilbert locale gli unici numeri di occupazione permessi sono

$n_i = 0, 1, 2$. La base per gli stati sul singolo sito è data da $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ che sono indicizzati con il numero di occupazione. La base computazionale per gli stati fisici, considerando tutti i possibili prodotti tensori ottenuti dalle basi su singolo sito, è

$$|n_1 \dots n_L\rangle \quad \text{con } n_i \leq 2. \quad (3.10)$$

Il modello effettivo conserva ancora il numero di bosoni, poiché non ci sono siti con più di due bosoni, si ha che il filling è limitato superiormente $0 \leq f \leq 2$. Il numero di stati in un settore dipende da f . Tra i vari settori abbiamo deciso di studiare quello di dimensione maggiore, ovvero quello per cui quello con $f = 1$. Questa scelta riduce lo spazio dei parametri liberi a W, U, ϵ .

Dallo studio dello spettro e degli autovettori di H è possibile stabilire se il sistema è MBL o ergodico. Per fare ciò, l'Hamiltoniana è stata diagonalizzata esattamente per varie realizzazioni di disordine e sono state studiate la statistica dei livelli e l'entropia di bipartizione del sistema. Successivamente introduciamo le quantità studiate, e presentiamo i risultati del caso $U = 2$.

3.2 Statistica dei Livelli

Il primo indicatore della localizzazione che analizziamo è la statistica dei livelli, ossia la statistica della quantità

$$\delta_n = |E_n - E_{n-1}| \quad (3.11)$$

dove l'indice n indicizza lo spettro in modo crescente partendo da 1.

Come già osservato nel capitolo precedente, nella fase ergodica la statistica dei livelli è quella di Wigner Dyson come per le matrici GOE, mentre nella fase localizzata essa è Poissoniana come nei sistemi integrabili. In entrambi i casi la distribuzione teorica dipende da un valore medio dei δ_n che non può essere considerato indipendente da n . Infatti nella fase ergodica la validità della meccanica statistica impone che la media $\bar{\delta}_n \propto e^{-\frac{S(E_n)}{k_B}}$ (dove S è l'entropia del sistema), facendo sì che $\bar{\delta}_n$ decada esponenzialmente andando verso il centro della banda. Non potendo definire univocamente $\bar{\delta}_n$ per sistemi

con pochi gradi libertà (L finito), è stato invece studiato il rapporto tra gap adiacenti [77][52], definito da

$$r_{n,\alpha} = \frac{\min(\tilde{\delta}_{n,\alpha}, \tilde{\delta}_{n+1,\alpha})}{\max(\tilde{\delta}_{n+1,\alpha}, \tilde{\delta}_n)} = \frac{\min(\delta_{n,\alpha}, \delta_{n+1,\alpha})}{\max(\delta_{n+1,\alpha}, \delta_{n,\alpha})} \quad (3.12)$$

dove α indica una particolare realizzazione del disordine e $\tilde{\delta}_n = |\epsilon_n - \epsilon_{n-1}|$. Nel limite $L \rightarrow \infty$ ci aspettiamo che le differenze tra gap adiacenti siano statisticamente indipendenti e che $\bar{\delta}_n = \bar{\delta}_{n+1}$ e di conseguenza r_n non dipenda da $\bar{\delta}_n$. La distribuzione $P(r)$ di $r_{n,\alpha}$ sotto queste ipotesi è calcolata in Appendice D, il risultato è

$$P_P(r) = \frac{2}{(r+1)^2} \quad (3.13)$$

$$P_{GOE}(r) \approx \frac{4r}{(r^2+1)^2} \quad (3.14)$$

dove $P_{GOE}(r)$ e $P_P(r)$ sono rispettivamente le distribuzioni di r per statistica dei livelli GOE e Poissoniana. L'eq 3.13 e 3.14 mostrano che nel limite $r \rightarrow 0$ le due probabilità hanno un andamento alquanto diverso $P_{GOE}(r) \propto r$, $P_P(r) \approx 2$. L'annullarsi di $P_{GOE}(r)$ è diretta conseguenza della repulsione dei livelli che sfavorisce la presenza di piccoli numeratori in eq 3.12. Nonostante sia qualitativamente corretta la forma di $P_{GOE}(r)$ risulta quantitativamente diversa da quella esatta che può essere meglio approssimata numericamente. Questo si può fare partendo dalla distribuzione esatta per gli autovalori per le GOE, e valutando gli integrali coinvolti nel calcolo con metodi Montecarlo. Il valore medio di r nelle due fasi risulta essere $\langle r \rangle_P = 2 \ln(2) - 1 \approx 0.386$ (ottenuto tramite integrazione) e $\langle r \rangle_{GOE} \approx 0.5295 \pm 0.0006$. (ottenuto numericamente in [52]).

Descriviamo in dettaglio la procedura utilizzata per valutare numericamente $P(r)$ e $\langle r \rangle$. Abbiamo utilizzato un generatore di numeri pseudo-random (Ranlux [78]) per creare varie realizzazioni di disordine α per i \mathcal{E}_i . Per rappresentare l'Hamiltoniana abbiamo utilizzato la base computazione data dall'eq 3.10, in cui ogni elemento è rappresentato da un numero naturale in base tre e minore di 3^L . Successivamente abbiamo imposto il vincolo di simmetria $f = 1$ per ridurre il numero di stati. Per ogni realizzazione di disordine α , abbiamo utilizzato la base ridotta, per rappresentare l'Hamiltoniana H_α (eq 3.4) nel settore di simmetria $f = 1$. H_α risulta essere una matrice simmetrica sparsa di circa $\frac{3^{2L}}{L^2}$ elementi. Al contrario di quello che avviene nei modelli non interagenti, il numero di elementi di matrice non nulli per ogni riga non è costante ma scala linearmente

L	D_L	N_p	stati
2	10 ⁵	40	3
3	10 ⁵	40	7
4	10 ⁵	40	19
5	10 ⁵	40	51
6	10 ⁴	40	141
7	3 · 10 ³	40	393
8	5 · 10 ³	40	1107
9	5 · 10 ²	40	3139
10	3 · 10 ²	40	8953
11	50	15	25653

TABELLA 3.1: In tabella è presentato un riassunto delle simulazioni eseguite. L = lunghezza catena; D_L = numero di realizzazioni di disordine; N_p =numero di punti W considerati; N_{stati} = numero di stati nel settore $f = 1$.

con L , questo rende la diagonalizzazione più dispendiosa in risorse. Gli autovalori di H_α sono stati calcolati utilizzando la subroutine ZHEEV() del pacchetto LAPACK [79]. L'algoritmo di diagonalizzazione è diviso in due parti. Nella prima parte H_α viene ridotta in forma tridiagonale (forma in cui gli unici elementi non nulli sono la diagonale e gli elementi adiacenti ad essa) tramite una serie trasformazioni M ortogonali $H'_\alpha = M^T H_\alpha M$ che non modificano lo spettro della matrice e la lasciano simmetrica. Nella seconda parte, per completare la diagonalizzazione, viene utilizzato un algoritmo QR [80], in cui vengono applicate opportune trasformazioni ortogonali che preservano la forma tridiagonale. Per i valori di L e W considerati, è stato determinato lo spettro su un ensemble di D_L realizzazioni di disordine diverse. I valori di D_L sono riportati in tabella 3.1. Questi ensemble sono stati usati per calcolare $P(r)$ e $\langle r \rangle$. Per ogni elemento α dell'ensemble, gli autovalori sono stati ordinati in maniera crescente e sono stati trovati gli $r_{n,\alpha}$ per tutto lo spettro usando l'eq 3.12. La distribuzione $P(r)$, ad L e W fissati, è stata calcolata dividendo $[0, 1]$ in 30 intervalli uguali e determinando le frequenze di occorrenza utilizzando tutto lo spettro e tutto l'ensemble. La media $\langle r \rangle$ è stata determinata mediando gli $r_{n,\alpha}$ prima sullo spettro e poi sull'ensemble. Come incertezza è stata utilizzata quella statistica, che non tiene conto di eventuali errori sistematici del processo di diagonalizzazione.

Abbiamo studiato la distribuzione $P(r)$ per vari valori dell'intensità del disordine. I risultati significativi per il caso $L = 11$ sono riportati in Figura 3.3 dove si vede che per i valori di $W \lesssim 4$ il sistema ha statistica dei livelli GOE, mentre per $W > 14$ il sistema ha statistica Poissoniana. Questo suggerisce che per $W \lesssim 4$ il sistema è ergodico

mentre per $W \gtrsim 14$ esso sia MBL. Nella regione intermedia $4 \lesssim W \lesssim 14$ la statistica deve necessariamente passare da GOE a Poissoniana, quindi il sistema passa da essere delocalizzato ad essere localizzato. Troviamo quindi una prima conferma del fatto che il sistema studiato attraversa una transizione MBLD da qualche parte nell'intervallo $4 \lesssim W \lesssim 14$. Abbiamo indagato l'andamento di $P(r)$ in funzione di L nella regione $4 < W < 14$. In Figura 3.4 sono riportati alcuni grafici che riportano $P(r)$ al variare di L in vari punti della regione critica. Sono stati trovati 3 andamenti riportati in Figura 3.4:

- a) Le curve $P(r)$, al variare di L e ad W fissato, si incontrano in un unico punto r^* . Il punto r^* è situato sulla curva $P_{GOE}(r)$. Aumentando L le curve si avvicinano alla curva $P_{GOE}(r)$. In particolare alla destra di r^* le curve si alzano mentre alla sinistra si abbassano. Nel limite $L \rightarrow \infty$ ci aspettiamo che queste curve vadano a sovrapporsi con $P_{GOE}(r)$. Abbiamo trovato questo andamento per valori di $W < 5$, qui il sistema è ergodico. Figura 3.4(a).
- b) Le curve $P(r)$ sono quasi coincidenti e non è possibile definire univocamente un punto di incontro o una curva limite per $L \rightarrow \infty$. Questo andamento si ha per $5 < W < 9$ e non permette di determinare la fase in cui si trova il sistema. Vedi Figure 3.4(b)-3.4(c).
- c) Le curve $P(r)$ si incontrano in un unico punto r^* . Questa volta r^* è situato sulla curva $P_P(r)$. Aumentando L le curve si avvicinano alla curva $P_P(r)$. In particolare, al contrario del caso (a), alla sinistra di r^* le curve si alzano mentre alla destra si abbassano. Nel limite $L \rightarrow \infty$ ci aspettiamo che la statistica tenda a diventare Poissoniana $P_P(r)$. Abbiamo trovato questo andamento per valori di $W > 9$, qui il sistema è MBL. Vedi Figura 3.4(d).

Questa analisi ha permesso di restringere la zona in cui avviene il passaggio da una statistica all'altra a $5 \lesssim W \lesssim 9$. In questa zona il sistema attraversa una transizione MBLD.

Per determinare con più precisione il confine tra le due fasi è stato studiata la media della quantità $\langle r \rangle$ in funzione di W , riportata in in Figura 3.5. Nuovamente la zona a bassi W mostra un andamento tipico della statistica GOE mentre ad alti W la statistica torna Poissoniana. Le curve $\langle r \rangle(W)$, passando da un fase all'altra, si intersecano in un

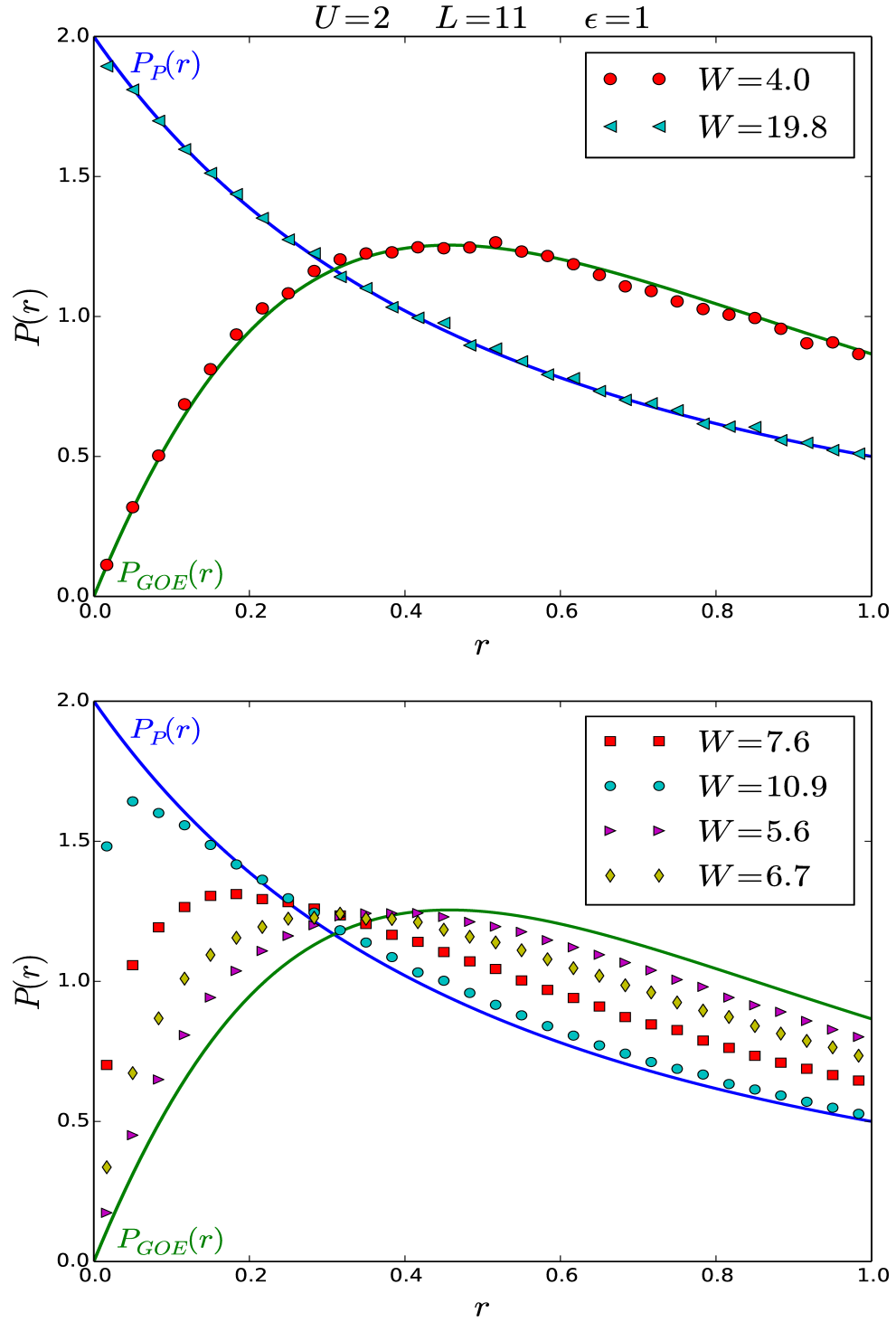


FIGURA 3.3: Distribuzione del rapporto dei gap adiacenti $P(r)$ relativa al terzo centrale dello spettro. Le linee continue rappresentano le previsioni teoriche per statistiche GOE (P_{GOE}) e Poissoniane (P_P).

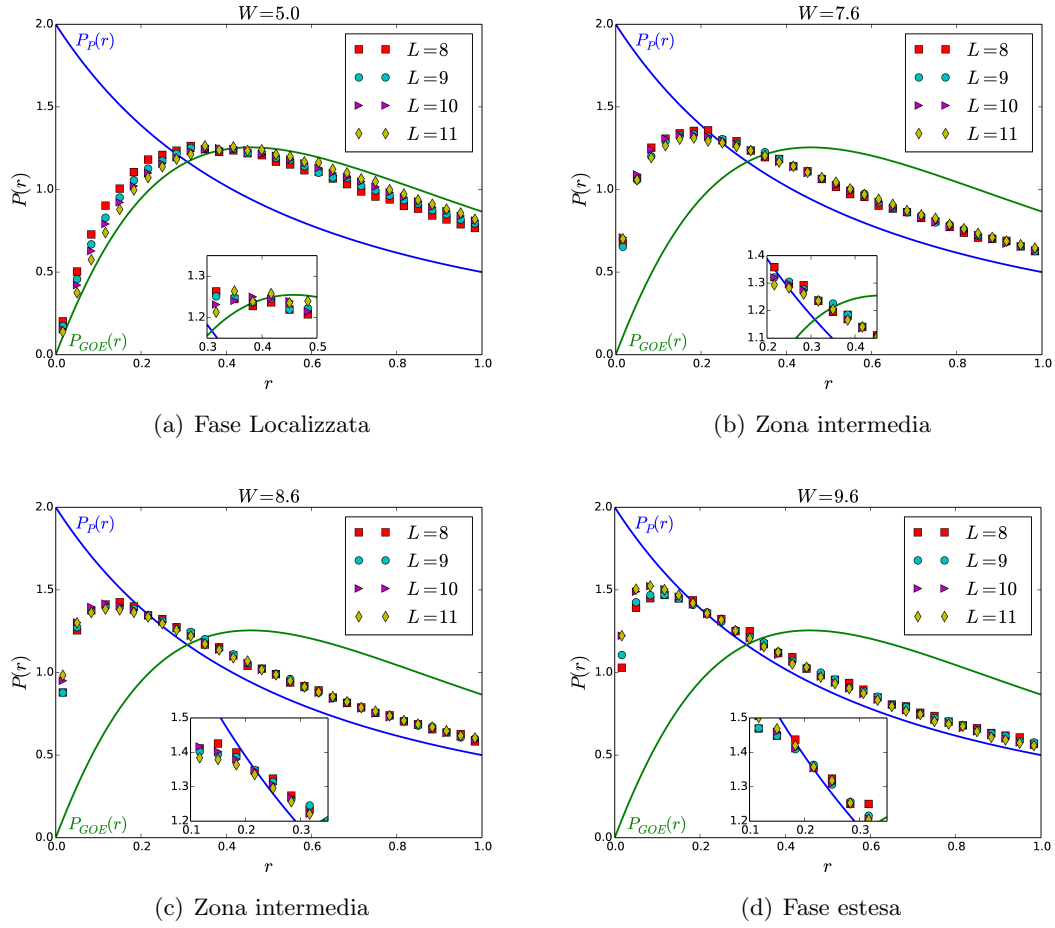


FIGURA 3.4: Distribuzione del rapporto dei gap adiacenti $P(r)$ riferita alla metà centrale dello spettro vicino alla transizione MBLD. I valori dei parametri $U = 2$, $f = 1$, $\epsilon = 1$ sono fissati in tutti i pannelli. Le linee continue rappresentano le previsioni teoriche per statistiche GOE (blu), e Poissoniane (verde).

unico punto (nei limiti della nostra risoluzione). La zona di intersezione è $7.5 < W < 8.5$ che è un intervallo in accordo con i risultati su $P(r)$.

Gli indicatori spettrali considerati non dipendono dall'energia, ma sono medie su tutto lo spettro. Poiché nel limite termodinamico e nella fase ergodica per la densità di stati vale $DOS(\epsilon) \propto e^{\frac{S(E)}{k_B}}$, la media seleziona il valore di $\langle r \rangle$ a temperatura $T = \infty$ (o a centro banda $\epsilon \approx 1$). L'analisi precedente porta alla stima per il punto di transizione $W_c(\epsilon = 1) = 7.5 \pm 0.5$.

Abbiamo visto però che il punto di transizione in generale dipende dalla zona dello spettro considerata. Per studiare la transizione a diversi ϵ è necessario definire il valore medio $\langle r \rangle_\epsilon$, in modo che sia sensibile esclusivamente al comportamento dei livelli energetici in prossimità di ϵ . Abbiamo suddiviso l'intervallo $[0, 1]$ in 20 intervalli uguali di larghezza

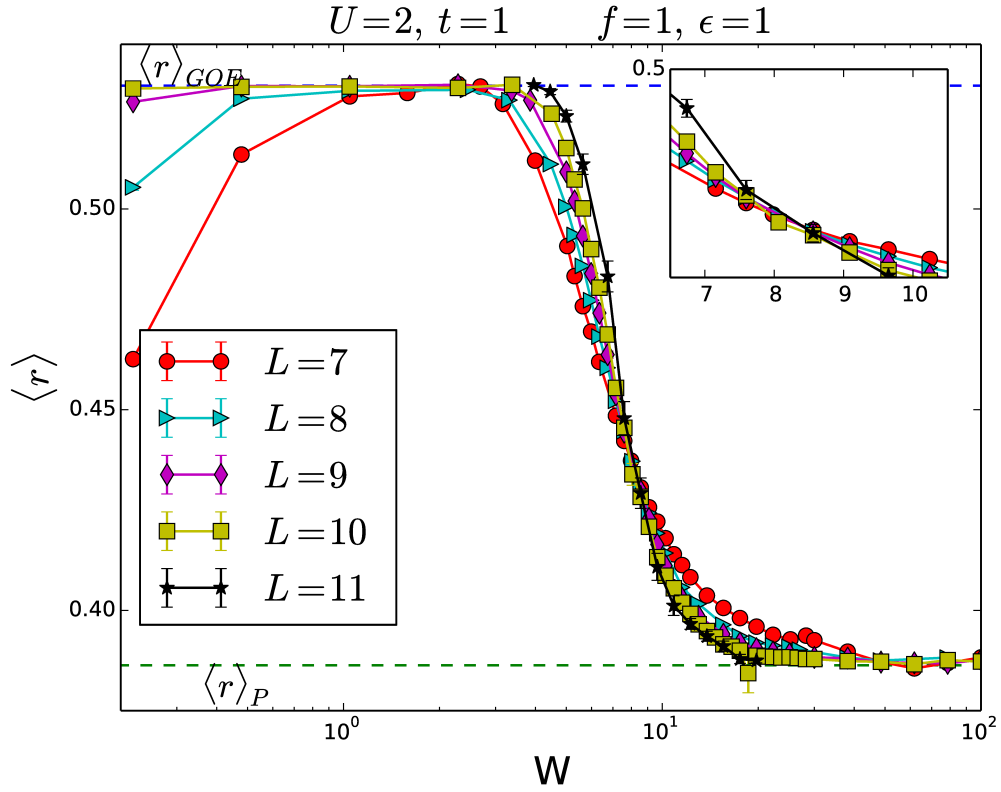


FIGURA 3.5: rapporto dei gap adiacenti r mediato (vedi Tabella 3.1) su disordine e spettro in funzione dell'intensità del disordine W . Le linee orizzontali sono in valori teorici per la distribuzione di Poisson e per la GOE.

0.05. Per ogni intervallo abbiamo valutato la media dei valori $r_{n,\alpha}$ per cui $\epsilon_{n,\alpha}$ cadeva nell'intervallo di intervallo. Il valore medio è indicato con $\langle r \rangle_\epsilon$, dove ϵ indica il punto medio dell'intervallo considerato. In figura 3.6 sono riportate le medie dei rapporti tra gap adiacenti per vari valori di ϵ , da queste emerge qualitativamente che aumentando ϵ la zona in cui avviene il crossing si sposta verso destra. Questo è in perfetto accordo con il fatto che per localizzare stati a bassa densità di energia serve meno disordine, in quanto la densità di stati minore rende più difficile l'ibridazione degli autostati. Abbiamo anche osservato che diminuendo ϵ il valore di $\langle r \rangle$ si discosta sempre di più da $\langle r \rangle_{GOE}$, rendendo più difficile l'individuazione di una fase ergodica. In particolare per i valori $\epsilon < 0.25$ non è stato possibile individuare una fase ergodica in cui la statistica dei livelli riproduce i risultati del GOE. Dall'analisi svolta non è stato possibile determinare se questo fatto è dovuto a effetti di taglia finita o se effettivamente la transizione della statistica dei livelli non ci sia per ϵ troppo piccoli.

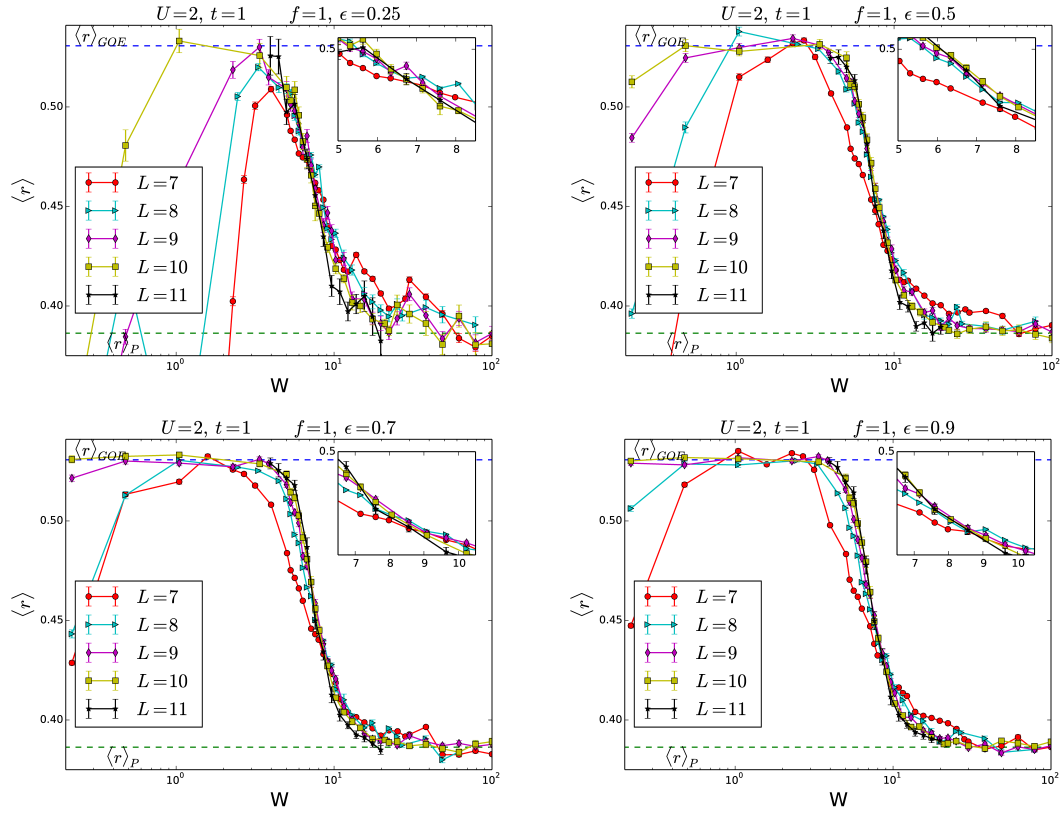


FIGURA 3.6: Rapporto dei gap adiacenti r mediato dell'intensità del disordine W . La media è stata fatta per diversi valori di ϵ dato da 3.6. Le linee orizzontali sono in valori teorici per la distribuzione di Poisson e per la GOE.

3.3 Entropia di entanglement

La seconda quantità che è stata considerata, per studiare la transizione MBLD, è l'entropia di bipartizione della catena di bosoni. Come già discusso, nella fase localizzata l'entropia degli autostati obbedisce a una legge dell'area, mentre nella fase ergodica segue l'usuale legge del volume. Nel caso di sistemi unidimensionali, come quello qui studiato, sostituendo $d = 1$ nell'eq 2.29 la legge del volume assume la forma $S \propto L$ e si ottiene che la legge dell'area diventa $S = const.$, ovvero S rimane costante e, aumentando L , non varia. Questo non sorprende se si considera che in una catena di ogni segmento di catena è collegato al resto della catena tramite due siti, indipendentemente dalla lunghezza del segmento stesso. Il punto in cui l'andamento dell'entropia passa da una legge all'altra identifica il punto in cui avviene la transizione MBLD del sistema. Se in punto W , variando ϵ , si può passare da una legge allora il sistema ha una mobility edge. La mobility edge del sistema può essere identificato con il valore di ϵ (o $\frac{E}{L}$) in cui avviene questo cambiamento.

Per studiare come l'entanglement scala con le dimensioni del sistema è risultato conveniente bipartirlo in due sottocatene A e B di lunghezza

$$\begin{cases} L_A = \frac{L-1}{2}, L_B = \frac{L+1}{2} & \text{se } L \text{ è dispari} \\ L_A = L_B = \frac{L}{2} & \text{se } L \text{ è pari} \end{cases}$$

così da massimizzare la lunghezza del sottosistema su cui è calcolata l'entropia.

Il calcolo dell'entropia, in funzione del parametro ϵ , è stato effettuato considerando per ogni realizzazione di disordine α , l'autostato $|\psi_n\rangle$ con ϵ_n più vicino al target prefissato ϵ_{targ} e calcolandone l'entropia $S_\alpha(\epsilon_{targ}, L)$ di bipartizione su A .

Le quantità che sono state studiate come indicatori della transizione sono la media dell'entropia

$$\langle S \rangle(\epsilon, W, L) = \frac{1}{D_L} \sum_{\alpha} S_{\alpha}(\epsilon, W, L) \quad (3.15)$$

e la deviazione standard

$$\sigma_S(\epsilon, W, L) = \sqrt{\frac{1}{D_L} \sum_{\alpha} (S_{\alpha}(\epsilon, W, L) - \langle S \rangle(\epsilon, W, L))^2} \quad (3.16)$$

In seguito, dove non è necessario, lasceremo implicita la dipendenza da L di queste quantità.

La Figura 3.7 mostra l'entropia media $\langle S \rangle$ del sistema a $\epsilon = 1$, per vari valori di L . Per disordine sufficientemente basso $W < 18$ l'entropia aumenta visibilmente con L mentre per $W > 18$ l'entropia diventa indipendente da L e le incertezze sono consistenti con un fit ad una costante. Questo conferma ulteriormente l'esistenza di una fase MBL per il sistema. Il fatto che $W \approx 18$ disti molto dalla zona di transizione individuata con la statistica dei livelli è conseguenza del fatto che questo punto non è una buona stima del punto di transizione. Nell'ipotesi di una transizione MBLD continua, l'entropia alla transizione deve necessariamente crescere linearmente con L , poiché a causa della concavità dell'entropia gli altri andamenti possono essere esclusi come discusso nel Capitolo 2. Per trovare il confine tra le due fasi è necessario considerare l'entropia media per sito $\langle s \rangle(\epsilon, W)$ ottenuta dividendo l'entropia S per il numero di siti nel sottosistema A . Nel limite $L \rightarrow \infty$, nella fase estesa, $\langle s \rangle(\epsilon, W)$ tende ad un valore termico $s_{th}(\epsilon, W)$, mentre nella fase localizzata $\langle s \rangle(\epsilon, W) \rightarrow 0$.

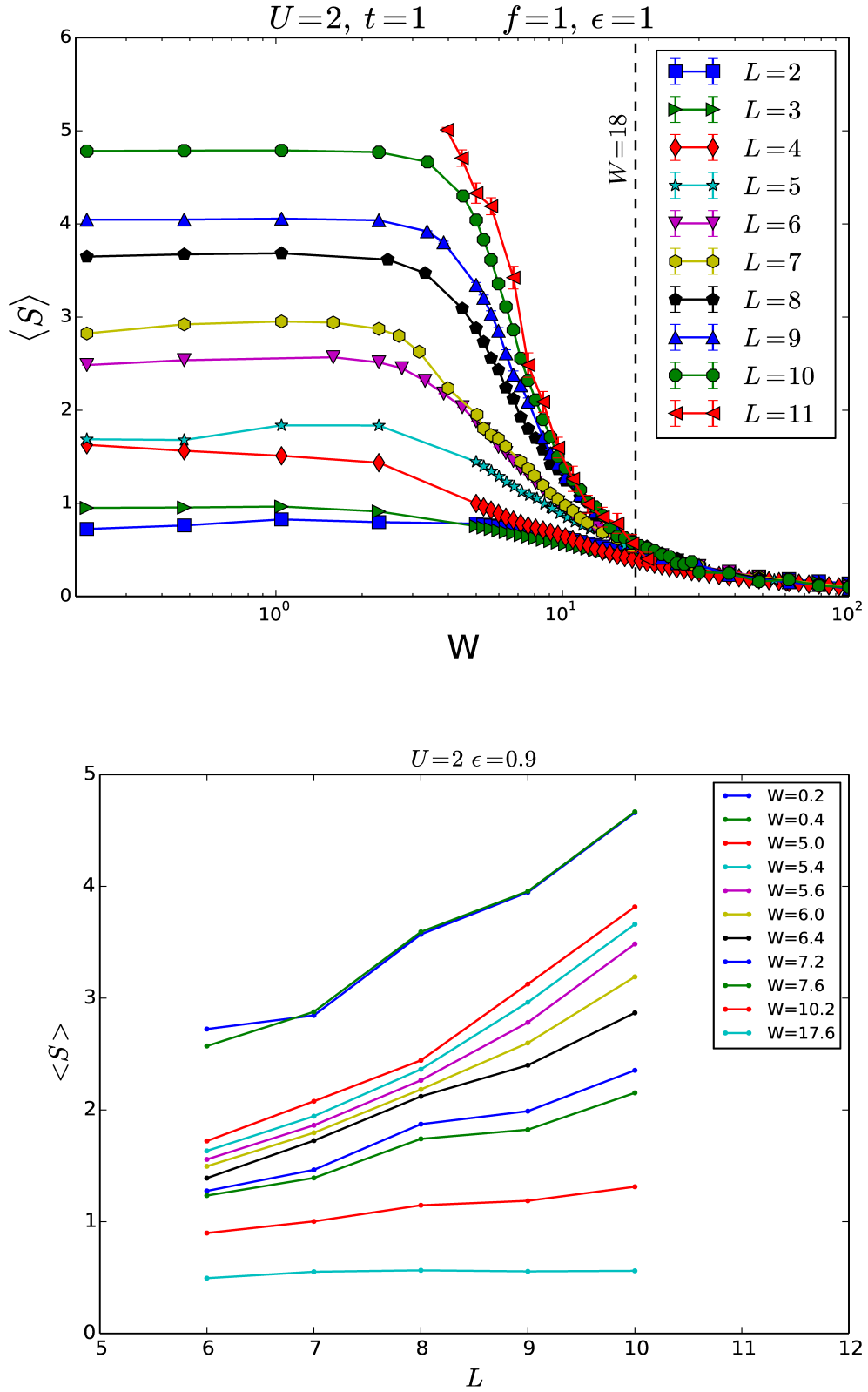


FIGURA 3.7: Entropia di bipartizione del sistema $\langle S \rangle$ a fissato ϵ al variare del disordine W e della lunghezza della catena L . Nella figura in alto sono rappresentate le curve di $\langle S \rangle (W)$ al variare di L . Nella figura in basso sono rappresentate le curve di $\langle S \rangle (L)$ al variare di W .

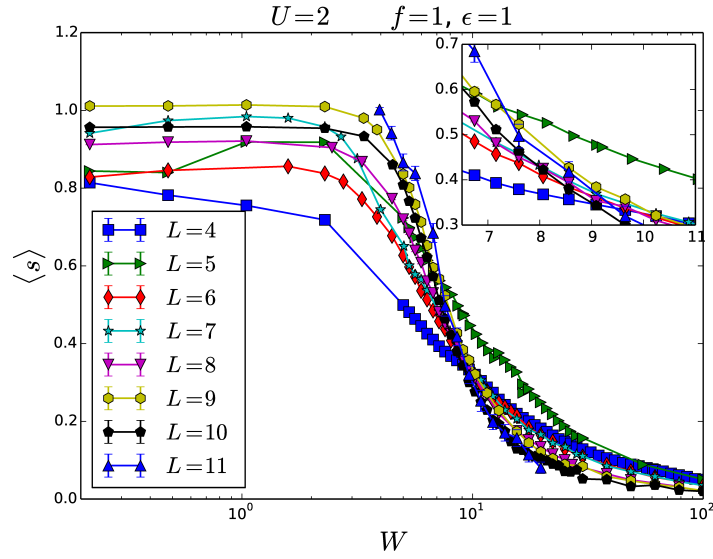


FIGURA 3.8: Entropia di bipartizione per sito del sistema in funzione del disordine W a fissato $\epsilon = 1$ lunghezza della catena L . L'inserto riporta le curve per L pari, dopo un'ulteriore media sugli ϵ vicino al target.

In Figura 3.8 sono riportati i risultati ottenuti per $\langle s \rangle$ per vari valori di L . Nella fase localizzata $\langle s \rangle$ tende effettivamente a 0, mentre in quella delocalizzata, a causa di effetti di taglia finita non è possibile vedere la saturazione di $\langle s \rangle$ ad un valore costante, ed in particolare i valori dispari di L hanno un'entropia più alta di quelli per L dispari. In particolare per $\epsilon = 1$, come si vede dall'inserto in figura, abbiamo trovato che le curve per L pari e quelle L dispari si incontrano in due punti distinti. Questi punti di crossing ci danno una stima della zona di transizione consistente tra loro $8 \lesssim W \lesssim 9$. Tale risultato è in accordo con le predizioni date dalla statistica dei livelli.

Abbiamo trovato che l'entropia media si presta meglio di $\langle r \rangle$ ad uno studio della transizione in funzione dell'energia. Per ottenere risultati quantitativi sulla transizione e trattare i valori di L tutti insieme, è stato necessario ricorrere ad un'analisi di finite size scaling, che è presentata nel capitolo successivo.

La distribuzione di probabilità dell'entropia $P(S(\epsilon, W))$, riportata in Figura 3.9, si comporta diversamente a seconda della fase in cui si trova il sistema. Nella fase ergodica $P(S(\epsilon, W))$ ha un picco ben pronunciato, che aumentando L , si restringe in accordo con l'ETH secondo il quale S dipende solo dall'Energia. Nella fase localizzata invece il valore di S tende ad una costante finita e la forma della distribuzione non varia significativamente con L . Vicino alla transizione MBLD ogni singolo autostato può essere localizzato

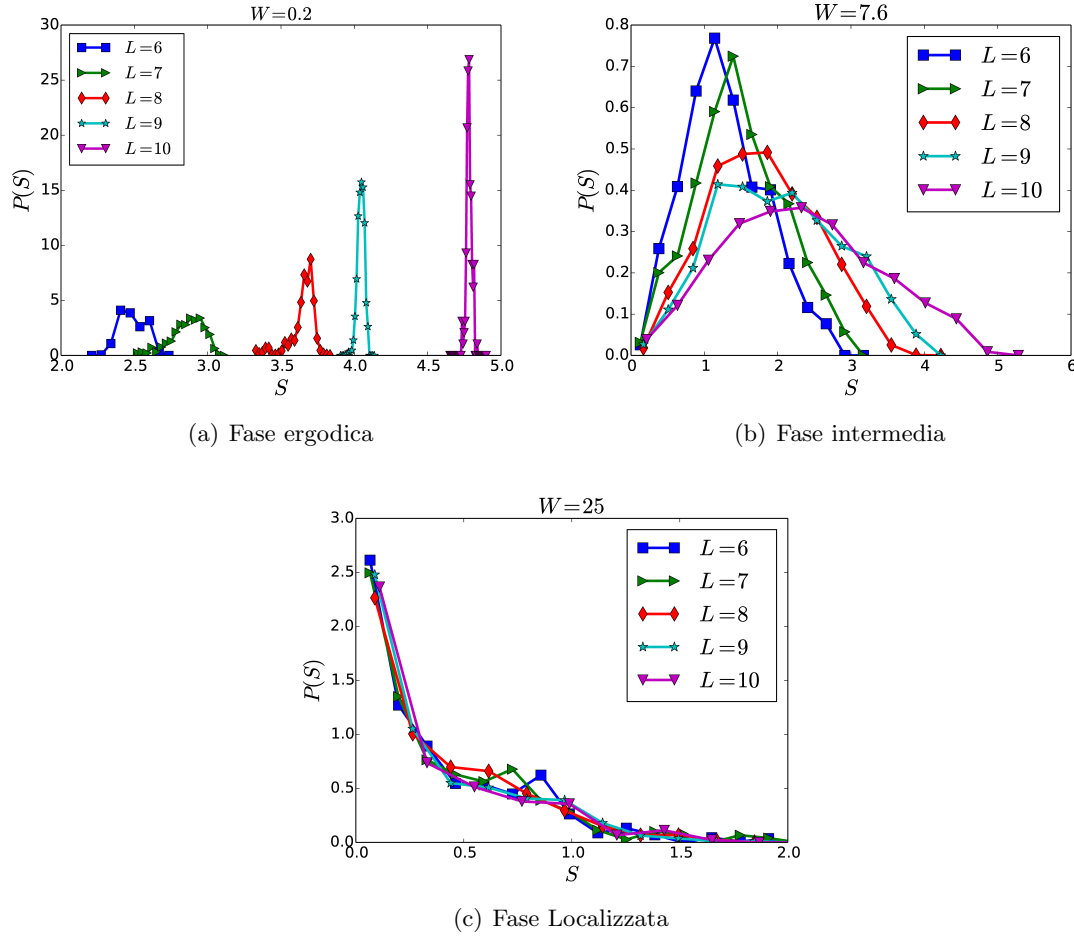


FIGURA 3.9: Distribuzione di probabilità dell'entropia di bipartizione per alcuni valori del disordine W . Sono fissati $\epsilon = 1$ e $f = 1$.

o delocalizzato a seconda dei dettagli della particolare realizzazione di disordine da cui proviene, dando origine ad una distribuzione che si allarga aumentando L .

Come già osservato in un recente lavoro di Kjäll et al. [53], il parametro più adatto a cogliere questa variazione di $P(S(\epsilon, W))$ è la deviazione standard dell'entropia σ_S . Nel limite termodinamico σ_S rimane finita o tende a zero in entrambe le fasi del sistema e diverge solo alla transizione. La transizione di fase può quindi essere individuata determinando il punto in cui vi è questa divergenza. In Figura 3.10 è riportato l'andamento di σ_S a centro banda, dove si vede che, fissato W , $\sigma_S(L)$ è crescente nella zona $6 \lesssim W \lesssim 12$, ed in particolare il picco più elevato ($L = 11$) si trova in $6.5 \lesssim W \lesssim 9$. Il primo intervallo individua la zona in cui avviene la transizione MBLD, ed è d'accordo con i risultati degli altri indicatori. Poiché la posizione del picco si sposta con L , non possiamo dire lo stesso per il secondo intervallo che quindi rappresenta solo una stima della zona di transizione.

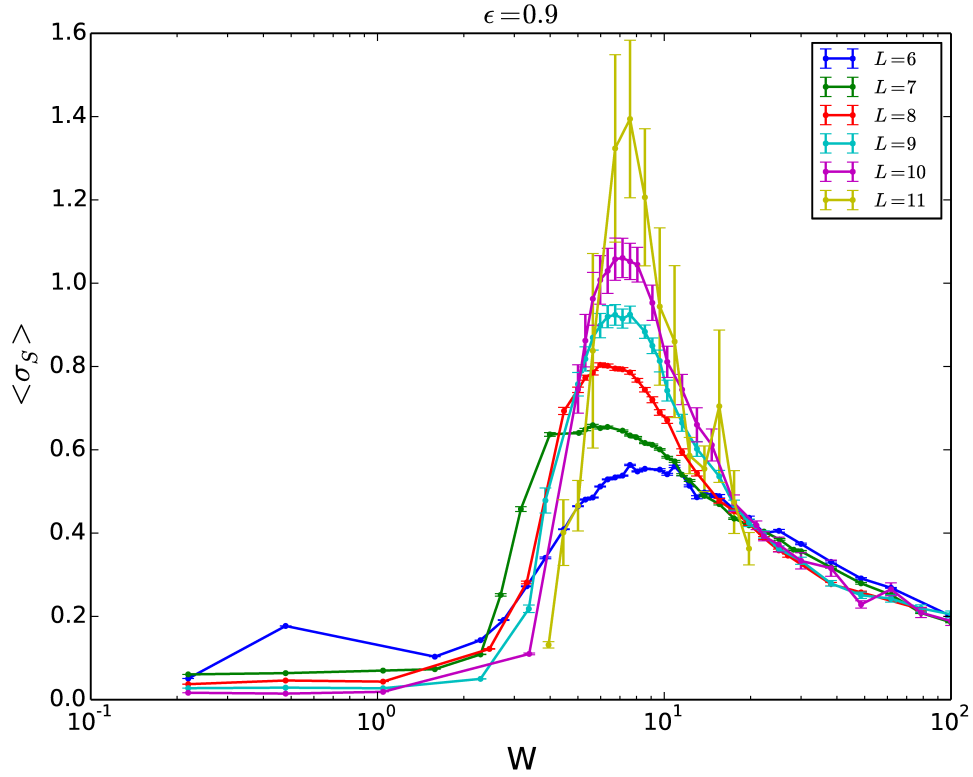


FIGURA 3.10: Deviazione standard dell'entropia in funzione di dell'intensità di disordine W per vari valori di L . Sono fissati $f = 1$ e $U = 2$.

Anche in questo caso, per ottenere risultati quantitativi, è stata necessaria un'analisi di finite scaling.

3.4 Diagramma di fase

Nella sezione precedente sono stati presentati e motivati gli indicatori della transizione MBLD studiati: rapporto tra gap adiacenti (r), entropia media (S), deviazione standard dell'entropia (σ_S). Una prima analisi qualitativa di questi ha confermato che effettivamente il modello di bosoni interagenti considerato, per $U = 2$ e $\epsilon = 1$ attraversa una transizione MBLD. Tutti gli indicatori considerati sono in accordo con il fatto che a elevati valori dell'intensità del disordine ($W \gtrsim 9$) il sistema esibisce un comportamento MBL mentre a bassi valori del disordine ($W \lesssim 6$) è ergodico. In questa sezione viene presentato lo studio sistematico degli indicatori al fine di determinare, con la maggior precisione possibile, il confine tra le due fasi, con lo scopo di tracciare il diagramma di fase del sistema.

Presentiamo la tecnica di “finite size scaling” utilizzata per analizzare i dati. I risultati finali ottenuti sono riassunti dai diagrammi di fase presentati alla fine di questa sezione.

In un sistema isolato di dimensioni finite, rigorosamente la termalizzazione non è possibile. Infatti una rigorosa definizione di operatori locali per il sistema emerge solo al limite termodinamico ($L \rightarrow \infty$). Inoltre la MBLD non è visibile per lunghezze inferiori alla lunghezza di localizzazione del sistema, in quanto i blocchi di taglia inferiore a questa risultano essere ancora termalizzanti. La transizione MBLD è un fenomeno che, come le usuali transizioni termodinamiche, emerge solamente da un limite termodinamico ($L \rightarrow \infty$) nel quale un generico indicatore $Q(W, L)$ esibisce un comportamento critico (non analitico) nel punto di transizione. Poiché la dimensione dello spazio di Hilbert da studiare scala esponenzialmente con la taglia della catena, è stato possibile studiare sistematicamente gli indicatori della transizione solo per piccoli valori di L ($L \leq 10$). Non avendo a disposizione valori di L elevati, per ottenere dai dati il comportamento degli indicatori per $L \rightarrow \infty$ è stato necessario ricorrere ad un’analisi di finite size scaling.

L’assunzione alla base della teoria di finite scaling è che le deviazioni dal comportamento critico del sistema compaiano quando la lunghezza di correlazione ξ_{cor} , che nel punto di transizione diverge, diventa paragonabile alle dimensioni del sistema[81]. Le quantità $Q(W, L)$ hanno un comportamento critico alla transizione, che si manifesta solo quando $\frac{\xi_{cor}}{L} \gg 1$, mentre per $\frac{\xi_{cor}}{L} \ll 1$ la lunghezza che domina il sistema è L e il comportamento di Q è regolare. Questi andamenti vincolano la dipendenza di Q dai parametri. Più precisamente, utilizzando il formalismo del Gruppo di Rinormalizzazione (RG), è possibile dimostrare che per L sufficientemente elevato, vicino al punto critico W_c , la forma funzionale di Q deve essere

$$Q(\xi_{cor}, L) = L^a \tilde{f}\left(\frac{\xi_{cor}}{L}\right) \quad (3.17)$$

Dove a è un numero reale, $\tilde{f}(x)$ è una funzione regolare in 0. Per $W \rightarrow W_c$, ξ_{cor} diverge generalmente come una legge a potenza data da

$$\xi_{cor} \propto (W - W_c)^{-\nu} \quad (3.18)$$

dove ν è detto esponente critico della lunghezza di correlazione. Sostituendo la forma

di ξ_{cor} in 3.17

$$Q(W, L) = L^a f[(W - W_c)L^b] \quad (3.19)$$

dove $f(x)$ è detta funzione universale, $b = \frac{1}{\nu}$. Ponendo $W = W_c$ in eq. 3.19 si ottiene

$$Q(W_c, L) = L^a f(0) \quad (3.20)$$

Quindi l'esponente a specifica come il particolare indicatore scala con L alla transizione.

Gli argomenti utilizzati per ricavare l'eq. 3.19 valgono anche per la transizione MBLD, a patto di individuare un'unica lunghezza macroscopica dominante e divergente ξ . Utilizzando un nuovo schema di RG in [58] la validità di tale formula è stata provata per tutti i momenti della distribuzione dell'entropia del sistema. Spinti anche dai recenti successi ottenuti in [53] e [66], abbiamo studiato i dati numerici sugli indicatori utilizzando la forma di scaling 3.19

Per i dati numerici a disposizione e gli indicatori considerati, come osservato nel Capitolo 3, abbiamo trovato quantitative deviazioni dalla forma di scala asintotica. Abbiamo quindi considerando una forma di scala più generale

$$Q(W, L) = g(L) f[(W - W_c)L^b] \quad (3.21)$$

dove la forma di $g(L)$, $f(x)$, b dipendono dall'indicatore considerato. Nel limite $L \rightarrow \infty$, $g(L)$ può essere approssimato con la potenza di L dominante, così si ha $g(L) \approx L^a$ e si ottiene nuovamente l'eq 3.19.

Per verificare la validità della forma di scala 3.21, conviene introdurre le variabili riscalate x_L e y_L definite da

$$y_L(W, L) = \frac{Q(W, L)}{g(L)} = f[(W - W_c)L^b] \quad x_L(W, L) = (W - W_c)L^b \quad (3.22)$$

Se l'ipotesi di finite-size scaling è corretta, per i vari valori di L , i punti (x_L, y_L) dovrebbero appartenere tutti all'unica curva

$$y_L = f(x_L) \quad (3.23)$$

Ci riferiremo a questo fenomeno come collasso delle curve, o scaling collapse (Figura 3.13).

Il collasso delle curve è stato effettuato per i singoli indicatori. Abbiamo utilizzato operatori ϵ dipendenti, questo ha permesso di determinare il punto di transizione W_c e l'esponente critico b in funzione di ϵ .

Abbiamo studiato lo scaling dell'entropia media $S_\epsilon(W, L)$ ottenuta con la procedura descritta in precedenza, che permette di fissare un valore di ϵ nello spettro.

Nella fase ergodica, l'andamento di S in funzione di L è asintoticamente lineare, quindi la forma asintotica per il fattore di scala è $g(L) \approx L_A$ e la variabile di scala y_s in 3.22 coincide con l'entropia per sito. Per capire se questo regime asintotico è raggiunto abbiamo graficato l'entropia per spin $\langle s \rangle$ in funzione del disordine in Figura 3.12(a). Le curve ottenute, pur tenendo conto delle incertezze sui punti, non si incontrano in un punto unico come dovrebbe essere dalla 3.20. Perciò si è ritenuto necessario considerare le correzioni all'andamento di $g(L)$.

Come discusso nel Capitolo 1, nella fase delocalizzata vale l'ETH. Una delle conseguenze di questa è che, nel limite termodinamico, gli stati tipici della shell microcanonica a fissata energia hanno la stessa entropia degli autostati dell'Hamiltoniana appartenenti a tale shell. Vicino al centro della banda è lecito trascurare il vincolo sull'energia, infatti nel limite termodinamico mediare su tutti gli stati equivale a mediare sugli stati a $\epsilon \approx 1$. Per calcolare l'entropia di uno stato tipico del sistema sono necessarie le dimensioni degli spazi in cui è partizionato il sistema.

$$\begin{cases} \dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 3^{\frac{L}{2}} & \text{se } L \text{ è pari} \\ \dim(\mathcal{H}_A) = 3^{\frac{L-1}{2}}, \dim(\mathcal{H}_B) = (3^{\frac{L+1}{2}} - 1) & \text{se } L \text{ è dispari} \end{cases} \quad (3.24)$$

Partendo da 3.24, e utilizzando l'eq B.24, si trova che l'entropia di entanglement su A di uno stato tipico vale

$$S_A^{rand} = \frac{L}{2} \log 3 + c(L) \quad (3.25)$$

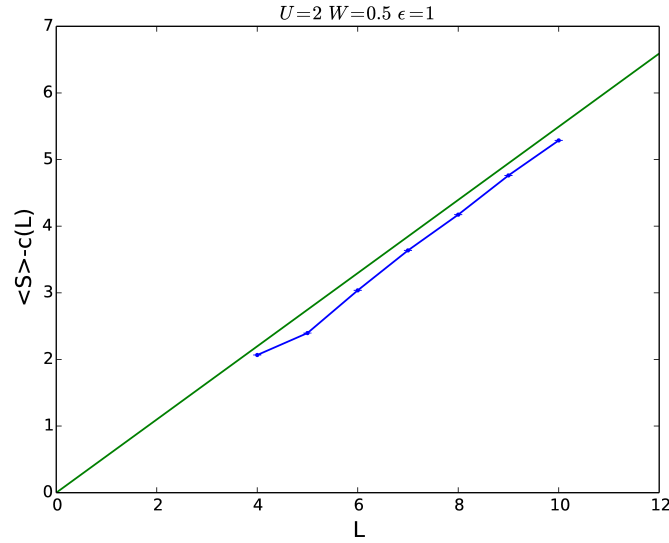


FIGURA 3.11: Entropia di bipartizione media a centro banda a confronto con l'entropia media di uno stato random. Per il confronto è stata considerata la quantità $S - c(L)$ dove $c(L)$ è dato dalla 3.26. La linea solida rappresenta la retta $y = \frac{L}{2} \log 3 = S_A^{rand} - c(L)$

dove $c(L)$ è un termine non lineare che vale

$$\begin{cases} c(L) = -\frac{1}{6} - \frac{\log 3}{2} & \text{se } L \text{ è dispari} \\ c(L) = -\frac{1}{2} & \text{se } L \text{ è pari} \end{cases} \quad (3.26)$$

Abbiamo confrontato le previsioni della 3.25, con i risultati numerici per l'entropia a centro banda $S_{\epsilon=1}(W, L)$. Dal grafico riportato in Figura 3.11 risulta che nella fase ergodica, fissato W , $S_1(W, L) - c(L) \approx S_A^{rand} - c(L)$. Questa relazione suggerisce di utilizzare come fattore di scala

$$g(L) = S_A^{rand} = \frac{L}{2} \log 3 + c(L) \quad (3.27)$$

Per i valori di L a disposizione ($L \leq 10$) la correzione all'andamento asintotico ha peso compreso tra 8% – 40%, quindi contribuisce a effetti quantitativi non trascurabili. Dal confronto dei grafici riportati in Figura 3.12 di y_L , $\langle s \rangle$ si nota che il crossing delle curve in un unico punto si verifica meglio quando viene utilizzata la $g(L)$ data da 3.27.

Per ottenere W_c e b relativi a $S_1(W, L)$ (entropia media a centro banda), abbiamo determinato con fit i valori dei parametri che meglio realizzavano lo scaling collapse descritto dall'eq 3.23. La bontà del collasso delle curve indotto da un set di parametri \tilde{b}, \tilde{W}_c è

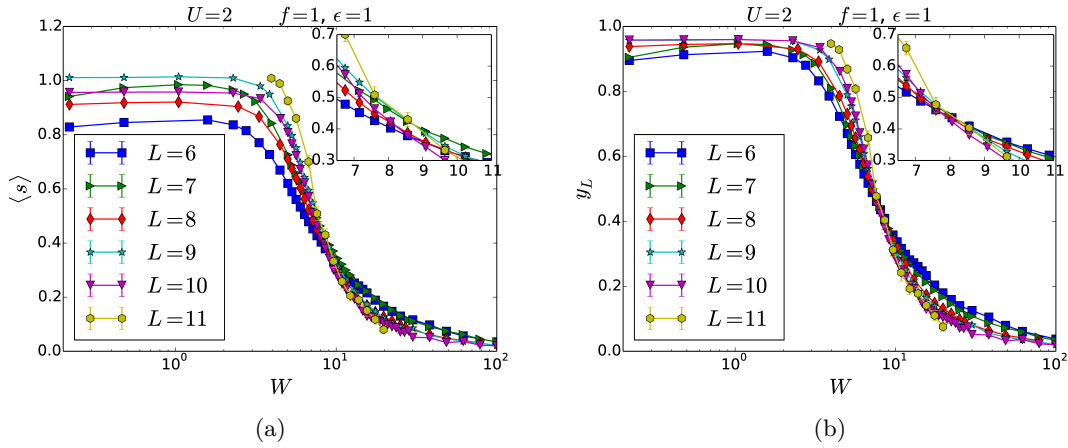


FIGURA 3.12: Entropia di bipartizione media a centro banda. In Figura 3.12(a) è riportata l'entropia per sito, mentre in 3.12(b) $y_s(W, L) = \frac{S_1(W, L)}{g(L)}$ con $g(L)$ dato dalla 3.27

stata quantificata con il χ^2 ridotto ($\chi_r^2(\tilde{b}, \tilde{W}_c)$) risultante dal fit polinomiale dei punti (x_L, y_L) . Nel caso in cui parametri distino molto da quelli corretti i punti (x_L, y_L) sono disposti su curve diverse per ogni L quindi, non potendo essere descritti contemporaneamente con un'unica funzione regolare, il fit restituisce un alto valore del χ_r^2 . Solo per una scelta di parametri vicina a quelli ottimali, i punti si dispongono sulla curva universale $f(x)$, che in un intorno dell'origine è ben approssimata dal suo polinomio di Taylor troncato. In questo caso quindi il fit polinomiale eseguito su una regione appropriata restituisce un valore di χ_r^2 basso. Operativamente abbiamo scelto di eseguire i fit con un polinomio di terzo grado in una finestra di larghezza $\Delta \approx 100$. Fissata la finestra abbiamo minimizzato il χ_r^2 risultante dal fit dei punti (x_L, y_L) , ottenuti considerando i valori $L \geq L_{min} = 6$, perché i punti per $L \leq 4$ risultano affetti da effetti di taglia finita. I valori per cui si ha il minimo sono stati presi come stima di W_c, b . L'errore statistico sui dati è stato valutato ripetendo il calcolo dopo aver sommato un errore gaussiano ai dati iniziali. L'errore dovuto a correzioni alla forma di scaling è invece stato stimato con la dispersione dei diversi risultati ottenuti variando la finestra di fit ed il valore di L_{min} .

In Figura 3.13 abbiamo riportato il collasso delle curve effettuato con i valori ottimali trovati per b, W_c e utilizzando $L_{min} = 6$ e $\Delta = 50$.

Visti i risultati positivi ottenuti a centro banda $\epsilon \approx 1$, anche per gli altri valori di ϵ abbiamo adottato una forma lineare per il fattore di scala $g(L) = L + d$ dove d è una costante che va ad aggiungersi ai parametri di scaling non noti. Abbiamo fittato separatamente i valori di L pari, perché, come avviene a centro banda, non ci aspettiamo

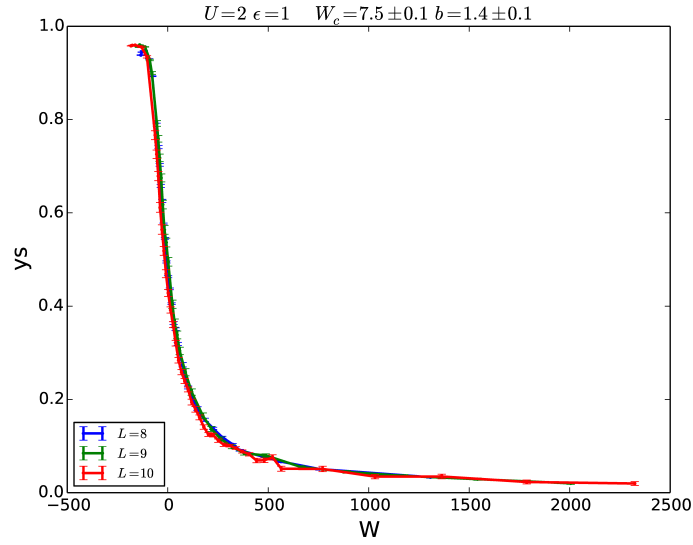


FIGURA 3.13: Scaling collapse dell'entropia di bipartizione su metà catena descritto dalle equazioni 3.21 e 3.27.

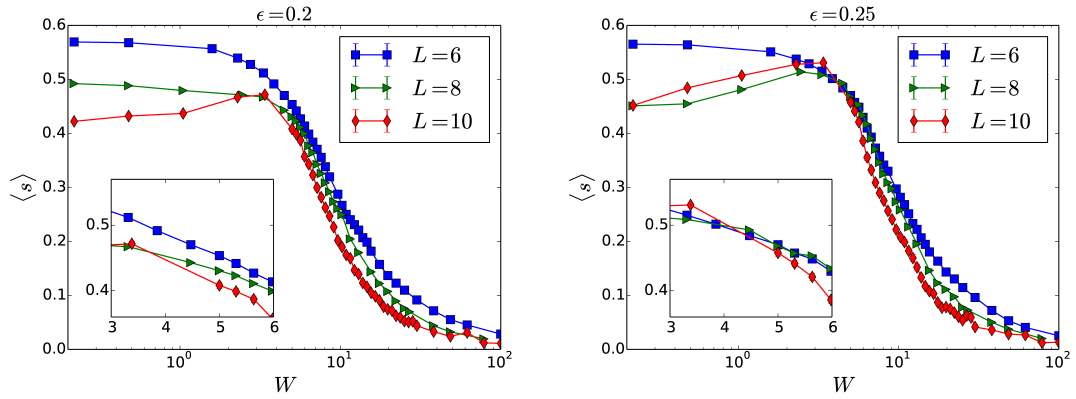


FIGURA 3.14: Entropia di bipartizione media per sito a valori di ϵ bassi. A destra è riportato il caso $\epsilon = 0.25$ dove è ancora individuabile un crossing. A sinistra è riportato il caso $\epsilon = 0.2$ per cui il crossing non è più visibile

che un unico valore di d sia applicabile a catene con L dispari ed L pari. Come valori di ϵ su cui fare l'analisi abbiamo considerato 20 punti equidistanti presi dall'intervallo $[0, 1]$. A bassi ϵ la densità di stati per i valori considerati è ancora molto bassa e l'ensemble di stati considerati per il calcolo dell'entropia ha un'alta dispersione in ϵ quindi non cattura l'andamento del sistema ad energia fissata. I valori di L analizzati non permettono di individuare un crossing per l'entropia per $\epsilon < 0.25$, mostrato in Figura 3.14. Per valori di $\epsilon > 0.25$, in modo analogo al caso a $\epsilon \approx 1$, per determinare il confine tra le due fasi è stata effettuata una minimizzazione del χ_r . In appendice E riportano il miglior collasso delle curve ottenuto.

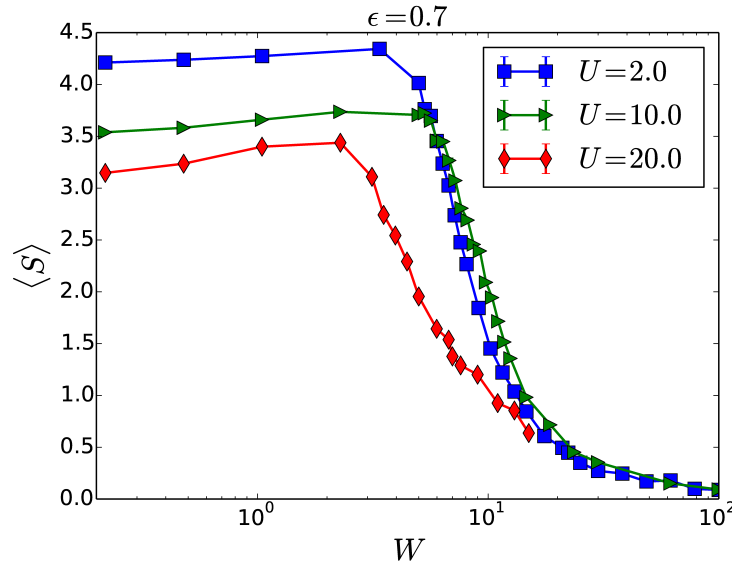


FIGURA 3.15: Entropia di bipartizione media S in funzione del disordine W per vari valori di U . L'entropia è valutata considerando i 30 autostati più vicini all' ϵ target. Il filling vale $f = 1$.

Abbiamo studiato il comportamento dell'entropia media del sistema anche all'aumentare U . Per $U = \infty$ il sistema è sempre localizzato, ci aspettiamo che aumentando U il comportamento passi gradualmente a essere localizzato (per ogni $W \neq 0$). Oltre al caso $U = 2$ abbiamo considerato $U = 10$, $U = 20$. Dal confronto dei grafici di $S(W, L = 10)$ riportati in Figura 3.15 risulta che aumentando U l'entropia diminuisce, in accordo con una maggiore localizzazione degli stati. Il caso $U = 10$ mostra sorprendentemente una fase estesa (individuata dal plateau a bassi W) più grande rispetto al caso $U = 2$.

Similmente al caso $U = 2$ abbiamo effettuato uno scaling collapse anche per i valori $U = 10, U = 20$. Abbiamo osservato che aumentando U aumenta anche il valore minimo di ϵ_{min} per cui è ancora possibile individuare un crossing tra le varie curve di entropia ad L fissato. Per il caso $U = 10$ come per il caso $U = 2$ il valore di $\epsilon_{min} \approx 0.25$ ha permesso di condurre l'analisi di scala su quasi tutto lo spettro, ed il diagramma di fase risultante è presentato in Figura 3.18. Invece per il caso $U = 20$ risulta $\epsilon_{min} \approx 0.7$, quindi non è possibile tracciare un diagramma di fase significativo.

Abbiamo analizzato il comportamento della deviazione standard σ_s al variare della taglia del sistema. Anche in questo caso la forma asintotica per il fattore di scala prevista è $g(L) \approx L$, ma ci aspettiamo rilevanti correzioni a questo andamento.

In generale se la curva $f(x)$ ha un massimo allora per ogni valore di L questo corrisponde

ad un punto di massimo per le curve $\sigma_{S,\epsilon}(W, L)$.

$$\sigma_{S,\epsilon}^{max}(L) = g(L)f(x^{max}) \quad (3.28)$$

Poiché $f(x)$ è fissata a meno di un fattore di normalizzazione è lecito supporre $f(x^{max}) =$

1. In tal caso troviamo che la forma di scala implica

$$\sigma_S^{max}(L) = g(L) \quad (3.29)$$

Per ottenere informazioni sulla forma di $g(L)$ abbiamo fatto un grafico della funzione $\sigma_S^{max}(L)$, riportato in Figura 3.16. I punti del grafico sono stati ottenuti fittando le funzioni $\sigma_S(W, L)$ a fissato L , con una parabola, vicino al punto di massimo. Come stima del vero massimo abbiamo considerato il vertice della parabola. Mentre le incertezze sono state trovate propagando l'errore dai coefficienti del fit. Per $L \geq 7$ abbiamo trovato che i punti sono disposti su una retta di pendenza p che varia con ϵ . Vicino alla transizione, al punto di massimo per σ_S , come osservato e discusso nella Sezione 3.3 la distribuzione di S diventa molto piatta. Gli estremi di questa sono i valori di S nelle due fasi S_{loc} , S_{deloc} . Considerando, in prima approssimazione, la distribuzione semplicemente uniforme, troviamo $\sigma_S^{max}(L) = \frac{S_{deloc} - S_{loc}}{\sqrt{12}}$. A centro banda si ha $S_{deloc} \approx 0.9 S_A^{rand}$ (Figura 3.12(b)), $S_{loc} \approx 0.5$ (Figura 3.7). Usando l'approssimazione $S_A^{rand} = 0.5 \log(3)L - 0.6 \pm 0.1$ si ottiene che per $\epsilon \approx 1$

$$\sigma_S^{max}(L) \approx 0.14L - 0.3 \quad (3.30)$$

I risultati del fit lineare in Figura 3.16 confermano la formula ottenuta, nei limiti di un errore inferiore ad una deviazione standard.

Utilizzando la formula lineare per $g(L)$ ricavata dal fit abbiamo tentato uno scaling collapse della forma 3.23. I valori dei parametri di scaling b, W_c sono stati presi uguali a quelli ottenuti dall'analisi dell'entropia media. I grafici dello scaling collapse riportati in Figura 3.17 mostrano le curve $\sigma_{1,S}$ per $L \geq 7$. In generale, anche per valori di $\epsilon \neq 1$, abbiamo riscontrato un buon collasso delle curve per valori di $L \geq 8$.

Utilizzando i punti $W_c(\epsilon)$ ottenuti dall'analisi di finite-size scaling dell'entropia media, abbiamo tracciato un diagramma di fase per il sistema nel piano (W, ϵ) . Abbiamo tentato

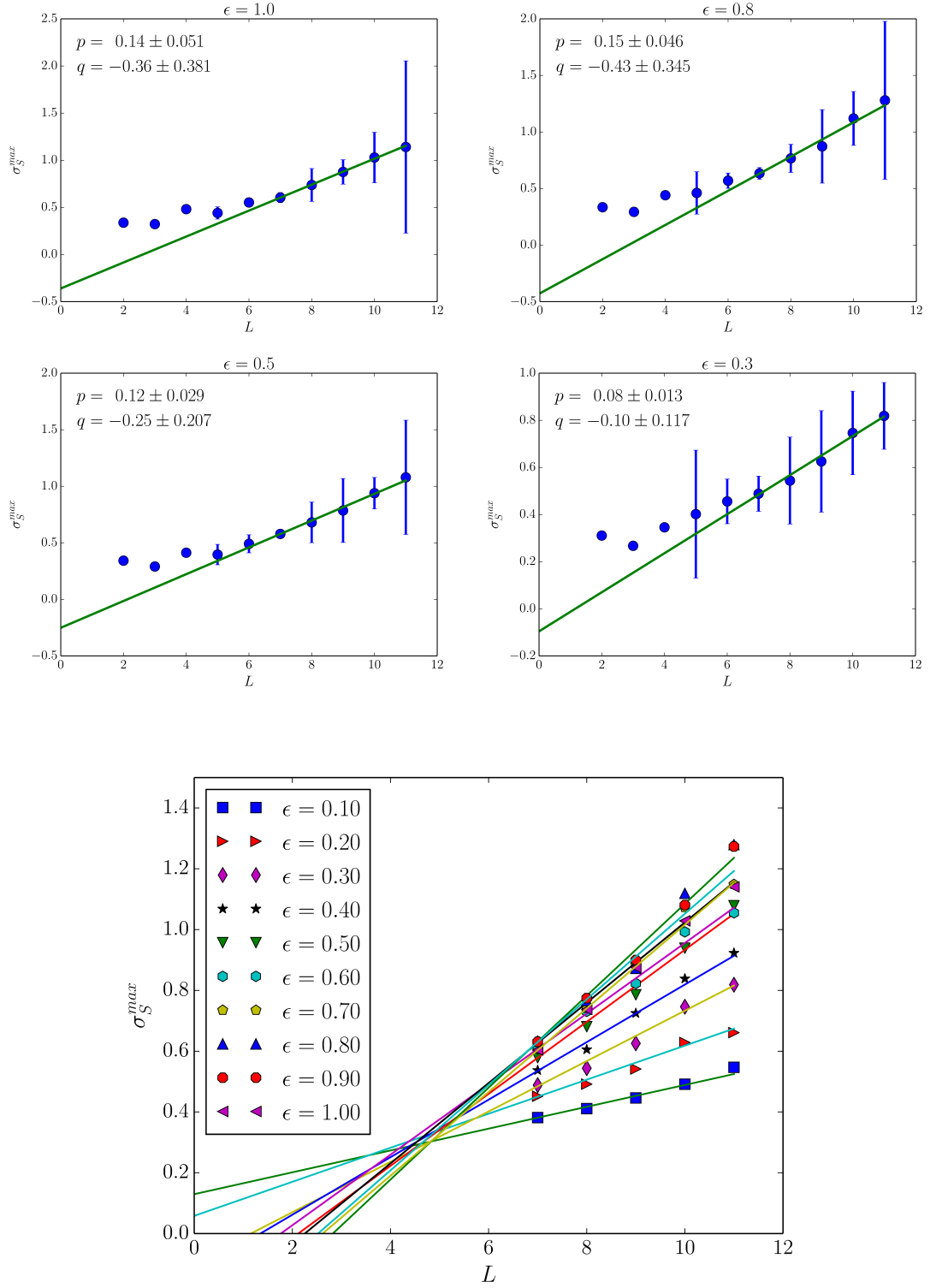


FIGURA 3.16: Valore massimo della deviazione standard dell'entropia per vari valori di L . La linea solida è ottenuta da un fit lineare dei punti a $L \geq 7$. La pendenza, e il termine noto della retta sono indicati da p, q ($y = px + q$). Sono fissati $U = 2$ e $f = 1$.

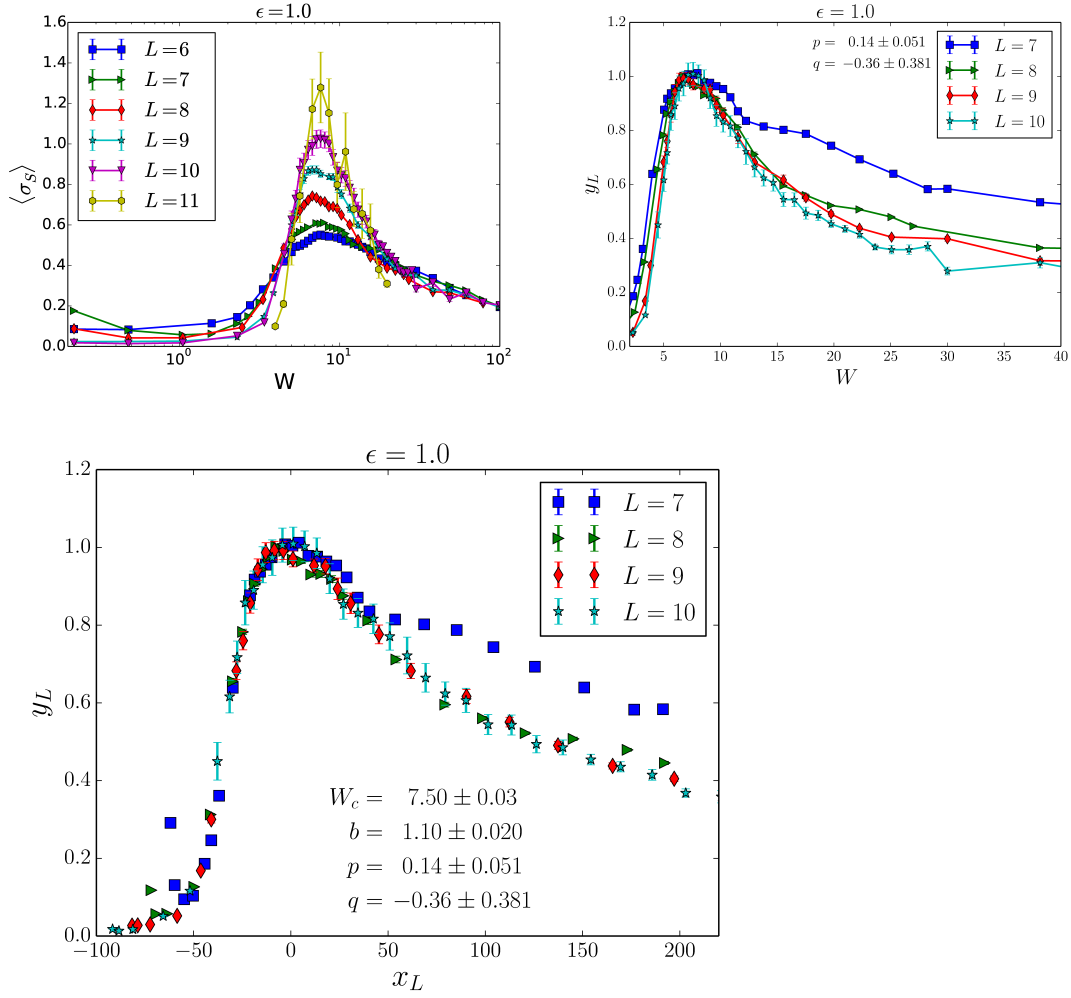


FIGURA 3.17: Scaling collapse della deviazione standard dell'entropia σ_S per $\epsilon = 1$, $U = 2$, $f = 1$.

di realizzare il diagramma per i valori $U = 2, U = 10, U = 20$. Aumentando U gli effetti di taglia finita del sistema diventano più importanti, in particolare per $U = 20$ l'analisi di finite-scaling non ha dato risultati quantitativi soddisfacenti.

In Figura 3.18(a) è riportato il diagramma di fase ottenuto per il caso $U = 2$. L'asse $\epsilon = 0$ si trova interamente nella fase localizzata. Infatti vale la generale legge dell'area per l'entropia del ground state. Invece l'asse $W = 0$ si trova interamente nella fase estesa, indicando che in assenza di disordine il sistema considerato non esibisce localizzazione. In generale per il modello disordinato ($W \neq 0$) si trova che fino a $W \approx 8$ il sistema può essere MBL o delocalizzato a seconda dell'energia. In particolare, poiché $\epsilon \propto \frac{E}{E_{max} - E_{min}} \propto \frac{E}{L}$, il diagramma conferma l'esistenza di una mobility edge estensiva per $W < 7.7$, mentre per $W > 8$ il sistema è FMBL. In Figura 3.18(b) è riportato il

diagramma per $U = 10$. In generale si vede che rispetto a Figura 3.18(a) la fase estesa si è ridotta. In particolare in questo caso la fase FMBL si ha solo per $W > 11$. L'andamento del diagramma di fase per $U = 10$ risulta più irregolare rispetto al caso $U = 2$. In particolare, la curva di confine non ha un andamento monotono. Non è chiaro se la curva ottenuta rispecchi effettivamente il reale confine o se gli effetti di taglia finita rendano poco affidabile questo risultato.

Per tutti i punti della transizione, abbiamo trovato che l'esponente critico $\nu = \frac{1}{b}$ per cui si verifica il collasso delle curve 3.23 ha un valore compreso tra $0.7 < \nu < 1.15$ (si veda l'Appendice E e Figura E.4). Quindi alla transizione la lunghezza macroscopica che governa la transizione diverge con un esponente critico $\nu = \frac{1}{b}$, $\xi \approx (W - W_c)^{-0.8}$. Troviamo incoraggiante che il valore, $\nu = 0.9(3)$, sia in accordo con i risultati ottenuti da entrambe le analisi di finite scaling su modelli di spin effettuate prima del nostro lavoro [53] e [66].

Nelle transizioni termodinamiche spesso gli esponenti critici devono soddisfare determinate relazioni. In particolare, per transizioni indotte da disordine, il criterio di Harris-Chayes afferma che $\nu \geq \frac{2}{d}$ (con d dimensionalità reticolo). Questo nel caso di sistemi unidimensionali come quello considerato diventa $\nu \geq 2$, che sembra non essere rispettato dai risultati ottenuti né dalla nostra analisi di finite size scaling né da quelle in [53] e [66]. L'accordo tra i tre risultati nel violare il criterio di Harris suggerisce quindi che, per la transizione MBLD, l'usuale forma di finite-size scaling potrebbe richiedere correzioni o che il punto fisso a cui fluisce la fase MBL abbia proprietà molto diverse dagli usuali punti fissi dominati dal disordine.

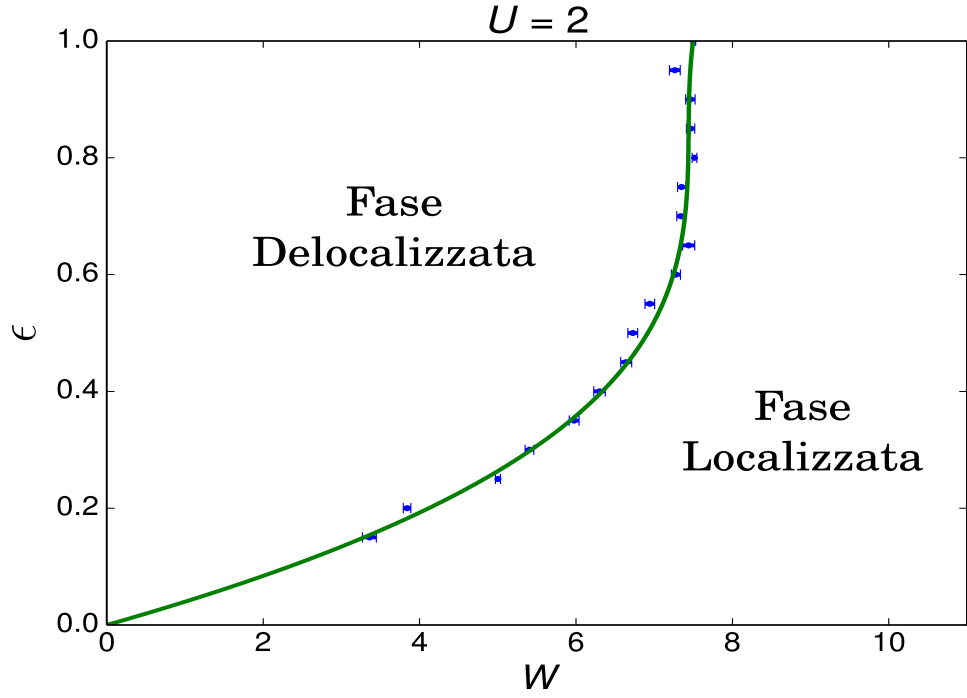
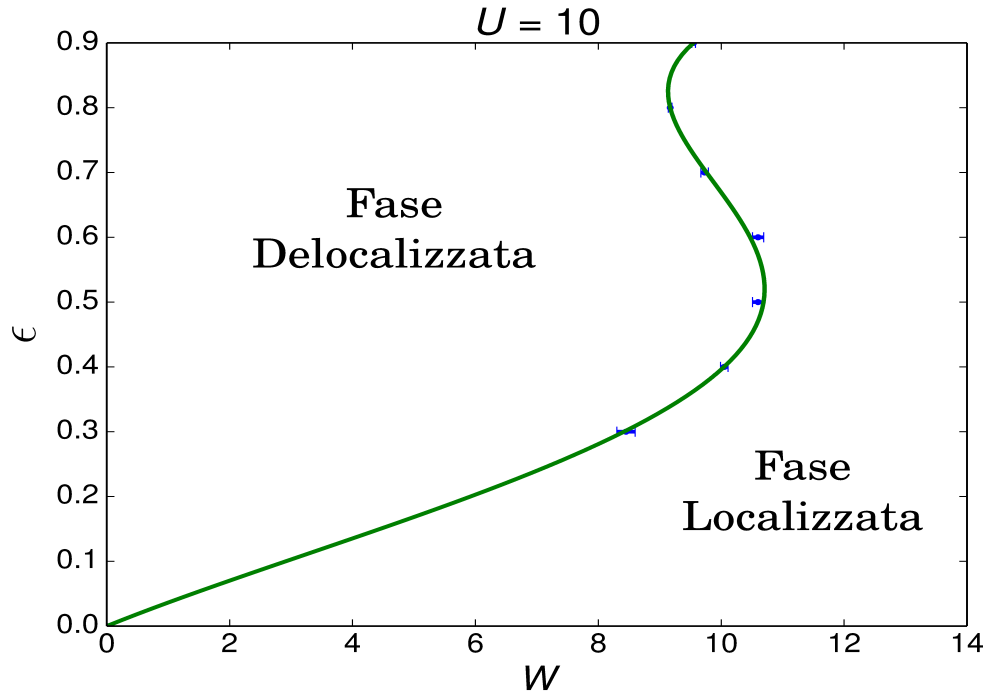
(a) Diagramma di fase nel piano $U = 2$ (b) Diagramma di fase nel piano $U = 10$

FIGURA 3.18: Diagrammi di fase del sistema per il modello di Bose-Hubbard disordinato e fortemente interagente, eq. 3.4. In (a) è riportato il diagramma nel piano $U = 2$, in (b) è riportato il diagramma nel piano $U = 10$. La linea continua rappresenta una curva polinomiale guida per occhio.

Capitolo 4

Conclusioni

In questo capitolo riassumiamo lo scopo della tesi, i risultati ottenuti e accenniamo ad una possibile linea su cui proseguire il lavoro iniziato in questa tesi.

Recentemente sono state portate molte prove a supporto della persistenza della AL in presenza di interazioni, che porta quindi ad una transizione MBLD. Secondo l'attuale comprensione del fenomeno la localizzazione a molti corpi è una fase della materia in cui non c'è termalizzazione. Nella fase MBL le assunzioni su cui si basa la meccanica statistica vengono meno, il sistema non riesce ad agire da proprio bagno termico ed è possibile osservare fenomeni che sono proibiti o inibiti per la materia ordinaria e promettenti per potenziali applicazioni pratiche.

Motivati dalla possibile realizzazione sperimentale di un sistema MBL con atomi freddi su reticolo e dai recenti lavori teorici in questa direzione, abbiamo portato prove numeriche a supporto dell'esistenza di una transizione MBLD in una catena 1D di bosoni fortemente interagenti. Tramite diagonalizzazione esatta dell'Hamiltoniana del sistema, abbiamo analizzato il comportamento di due quantità diverse: statistica dei rapporti tra gap adiacenti (eq 3.12), entropia di bipartizione del sistema (eq B.14). Al variare dei parametri del sistema (W, U) abbiamo identificato due fasi distinte per il sistema (MBL e termalizzante). Nella prima fase, che corrisponde alla materia ordinaria, abbiamo trovato che la statistica dei livelli segue il GOE e l'entropia degli autostati rispetta una legge del volume. Nella seconda fase, che corrisponde alla localizzazione a molti corpi, abbiamo trovato che la statistica livelli è Poissoniana e l'entropia degli autostati segue

una legge dell'area. Una prima analisi degli indicatori in funzione della taglia del sistema ha determinato che, per $T = \infty, U = 2$, transizione MBLD avviene per $7 \lesssim W \lesssim 8.5$.

Successivamente abbiamo analizzato la transizione MBLD con una risoluzione in energia, parametrizzando lo spettro con ϵ (eq 3.6). Abbiamo applicato sistematicamente un'analisi di finite size scaling sulla media e la deviazione standard dell'entropia degli autostati del sistema (eq 3.15, 3.16). Per i casi $U = 2, U = 10$ abbiamo ottenuto risultati apprezzabili che hanno permesso di determinare i due diagrammi di fase per il sistema nel piano (W, ϵ) , $U = \text{const.}$, che sono presentati in Figura 3.2. Entrambi i digrammi di fase hanno confermato l'esistenza di una fase FMBL per il sistema disordinato anche per valori di U e W con lo stesso ordine di grandezza.

Gli esponenti critici, da noi trovati con l'analisi di finite scaling per il sistema bosonico, sono in accordo con quelli trovati da altri autori che hanno studiato la transizione MBLD per sistemi di spin in 1D. Abbiamo discusso come questo fatto suggerisca un'universalità della transizione MBLD.

Il lavoro della tesi ha raggiunto lo scopo di esplorare la possibilità di avere localizzazione a molti corpi in sistemi bosonici e di produrre risultati sensibili a verifiche sperimentali. Riguardo la natura della transizione MBLD e della fase MBL vi sono però ancora molte questioni che richiedono uno studio più approfondito. Una di queste è la classe di universalità della transizione MBLD. Infatti, come discusso nel Capitolo 3, i valori degli esponenti critici, trovati nel nostro lavoro, suggeriscono che la classe di universalità della transizione sia diversa da quelle note. In futuro intendiamo indagare il comportamento dei sistemi in prossimità della transizione MBLD, per raggiungere una maggiore conoscenza del fenomeno.

Appendice A

Statistica dei livelli Poissoniana e GOE

Lo spettro $\{E_n\}$ di un Hamiltoniana è l'insieme dei suoi autovalori, per comodità qui supponiamo che gli autovalori siano indicizzati in maniera crescente $E_{n+1} \geq E_n$. L'esistenza di differenze nello spettro delle due fasi del sistema (MBL e termalizzante), che discuteremo a breve, conferma che la localizzazione e la termalizzazione non dipendono dalla scelta di base. Questo suggerisce che tutti i sistemi, che possono essere mappati l'uno nell'altro tramite trasformazioni unitarie, si trovano nella stessa fase.

Siamo interessati solo a proprietà universali dello spettro, ovvero quelle che permettono di distinguere la localizzazione dalla termalizzazione e che sono comuni ai sistemi nella stessa fase. Queste proprietà non dipendono dai dettagli microscopici della realizzazione di disordine considerata e la forma della distribuzione del disordine introdotto nel sistema. Ci aspettiamo quindi di poter definire le quantità di interesse come medie su degli “ensemble di sistemi” universali, che dipendono solo dalla fase considerata. Specificare un ensemble sui sistemi equivale a specificare una densità di probabilità sulle matrici $P(H) = P(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})$ degli elementi di matrice dell'Hamiltoniana del sistema. Un esempio di tale ensemble è dato dall'insieme delle realizzazioni di disordine del sistema. Lo studio delle proprietà universali di queste distribuzioni prende il nome di teoria delle matrici random (RMT) e ed è un ramo importante della fisica matematica [82].

L'uso della teoria delle matrici random (RMT) in fisica fu introdotto nel 1951 da Wigner e Dyson [83] nello studio dei livelli energetici di alcuni atomi. La teoria introdotta da

Wigner classifica i sistemi quantistici in base alle loro simmetrie. Le Hamiltoniane H che considereremo in questa tesi, appartengono alla categoria di sistemi per inversione temporale e rotazioni. Per questi sistemi è sempre possibile trovare una base di stati prodotto su singolo sito per cui H è simmetrica. Le trasformazioni ortogonali permettono di cambiare la base del sistema lasciando H reale.

Iniziamo considerando il caso di un generico sistema delocalizzato. Le proprietà universali dello spettro di questi sistemi emergono qualitativamente dal caso di Hamiltoniane 2×2 . Supponiamo che H sia una matrice reale data da

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Lo spettro è composto di soli due livelli E_1, E_2 , ed è descritto dalle quantità indipendenti $\text{Tr } H = E_1 + E_2$ (somma dei livelli) e $s = E_2 - E_1$ (spaziamento dei livelli). La fisica del sistema è invariante per costanti additive quindi l'unica quantità rilevante è data dallo spaziamento dei livelli. Diagonalizzando H si ottiene

$$s = \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2} \quad (\text{A.2})$$

che, avendo ordinato lo spettro, risulta positivo. Per un sistema generico, in assenza di disordine gli elementi H , saranno comparabili tra loro in dimensioni. Non avendo informazioni sulla forma precisa di H associamo a ognuno di questi una distribuzione gaussiana di varianza v .

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{x^2}{2v}}. \quad (\text{A.3})$$

Facendo il cambio di variabili $X_{\pm} = \frac{H_{11} - H_{22}}{2}$, la distribuzione delle variabili rimane gaussiana indipendente, mentre dalla A.2 si ha

$$s = 2\sqrt{X_-^2 + H_{12}^2} \quad (\text{A.4})$$

Poiché s è indipendente da X_+ la distribuzione di probabilità $P_{sp}(s)$ per $s > 0$ può essere

scritta come

$$P_{sp}(s) = \int \delta\left(s - 2\sqrt{X_-^2 + H_{12}^2}\right) p(H_{12})p(X_-) dH_{12}dX_- \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{2\pi v} \int \delta\left(s - 2\sqrt{X_-^2 + H_{12}^2}\right) e^{-\frac{X_-^2 + H_{12}^2}{2v}} dH_{12}dX_- \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{2\pi v} \int \delta(s - 2r) e^{-\frac{r^2}{2v}} r dr d\phi \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{2\pi v} 2\pi \left(\frac{s}{4} e^{-\frac{s^2}{8v}}\right) = \frac{s}{4v} e^{-\frac{s^2}{8v}} \quad (\text{A.8})$$

Prima di commentare il risultato ottenuto vogliamo eliminare la dipendenza dal parametro v . Questo infatti non è un parametro fisicamente rilevante perché l'unico suo effetto è fissare la tipica scala di energia dell'Hamiltoniana. Questo influisce solo sulla media $\langle s \rangle$ e non sulla forma della distribuzione. Infatti $\langle s \rangle$ vale

$$\langle s \rangle = \int_0^\infty s P_{sp}(s) ds = \frac{1}{4v} \int_0^\infty s^2 e^{-\frac{s^2}{8v}} ds = \sqrt{2\pi v} \quad (\text{A.9})$$

Sostituendo l'eq A.9 nell'eq A.5 otteniamo la Wigner Dyson Surmise $P_{WD}(s)$ che ha la forma

$$P_{WD}(s) = \frac{\pi s}{2 \langle s \rangle^2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4 \langle s \rangle^2}\right) \quad (\text{A.10})$$

Dalla A.10 emerge che

$$\lim_{s \rightarrow 0} P(s) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Questo è dovuto al fatto che, per avere $s = 0$ nell'eq A.2, devono essere soddisfatte più condizioni indipendenti (si devono annullare entrambi gli addendi). In generale l'eq A.11 non dipende dal tipo di simmetria considerato per l'ensemble né dalla particolare distribuzione assegnata agli elementi H . L'interpretazione fisica di dell'eq A.11 è che livelli delle Hamiltoniane tipiche di sistemi delocalizzati tendono a rimanere separati (se non ci sono simmetrie globali che prescrivono il contrario), questo fenomeno prende il nome di “repulsione dei livelli” [84]. Per $s \rightarrow 0$ sia ha $P(s) \propto s^\beta$ ($\beta = 1$), il coefficiente β dipende dal numero di condizioni indipendenti devono essere soddisfatte per avere $s = 0$ quindi anche dalla classe di simmetria studiata.

Il caso delle matrici 2×2 appena analizzato è generalizzato dall'Ensemble Gaussiano Ortogonale (GOE), introdotto da Wigner. Per matrici $N \times N$ la densità di probabilità

GOE è definita come

$$P_{GOE,N}(H)dH \propto \exp\left(-\frac{N}{2v}\text{Tr } H^2\right) \prod_{1 \leq i < j \leq N} dH_{ij} \quad (\text{A.12})$$

dove H è una matrice reale e simmetrica $N \times N$, v è la varianza dell'ensemble. Il GOE è l'unico ensemble che soddisfa le seguenti proprietà:

(P0) Le H_{ij} ($i \leq j$) sono variabili indipendenti

(P1) La distribuzione è invariante per trasformazioni ortogonali

La richiesta (P0) è solo una semplificazione del problema, mentre (P1) esprime il fatto che i sistemi delocalizzati non necessitano di basi privilegiate. Dall'eq A.12, gli elementi di matrice del *GOE* risultano essere distribuiti gaussianamente (gli elementi diagonali hanno varianza doppia rispetto a quelli off diagonali). Effettuando il cambio di variabili

$$dH = \prod_{1 \leq i < j \leq N} |E_i - E_j| \prod_{i=1}^N dE_i \quad (\text{A.13})$$

si può ottenere la densità di probabilità degli autovalori del GOE

$$P_{GOE,N}(H)dH \propto \exp\left(-\frac{N}{2v} \sum_{i=1}^N E_i^2\right) \prod_{1 \leq i < j \leq N} |E_i - E_j| \prod_{i=1}^N dE_i. \quad (\text{A.14})$$

Come abbiamo visto nel caso 2×2 lo spaziamento tra i livelli è una quantità che è capace di catturare le proprietà fisiche dell'Hamiltoniana come la repulsione dei livelli. La generalizzazione di questa quantità al caso N dimensionale è lo spaziamento dei livelli adiacenti $\delta_n = E_{n+1} - E_n$. La distribuzione degli spaziamenti dei livelli $P_{GOE}(s)$, nel limite $N \rightarrow \infty$, assume una forma più complicata, non esprimibile con una formula chiusa. La repulsione di livelli lineare è rispettata anche dal caso generico $N \times N$. In realtà le Hamiltoniane di sistemi con interazioni locali hanno una struttura molto diversa da quelle dell'ensemble GOE (quelle considerate nelle simulazioni numeriche sono matrici sparse). Nonostante ciò in natura e nelle simulazioni numeriche si osserva una universalità per le previsioni statistiche (es. fluttuazioni dei livelli) del GOE. Il fenomeno dell'universalità nelle matrici random non è ancora totalmente compreso, per una più completa descrizione dei teoremi e delle congetture rimandiamo a [85]. Una di queste congetture è che, considerando il limite termodinamico $N \rightarrow \infty$, la distribuzione

di $\frac{\delta_n}{\langle \delta_n \rangle}$ in sistemi con controparte classica caotica tende a quella GOE [84]. Poiché i sistemi caotici classici sono ergodici è naturale aspettarsi che questo valga in generale per sistemi che termalizzano. Questa congettura è rafforzata dal fatto che perturbando leggermente, con una matrice random presa dal GOE, un sistema integrabile (anche non interagente) l'Hamiltoniana risultante soddisfa l'ETH come dimostrato in [12].

Passiamo ora alla descrizione dello spettro dei sistemi localizzati. Consideriamo il caso in cui i livelli non sono correlati, che approssima bene i modelli con un elevato disordine diagonale, come quello di Anderson (con $W \gg t$) dove gli elementi off-diagonali sono tutti trascurabili rispetto alla differenza tipica tra due elementi sulla diagonale. In tal caso nel limite $N \rightarrow \infty$ la distribuzione dei livelli è Poissoniana, per la distribuzione degli spazamenti adiacenti $P_P(\delta_n)$ si ha

$$P_P(s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{s}{\bar{s}}} \quad (\text{A.15})$$

La distribuzione Poissoniana non mostra repulsione dei livelli, in particolare $P_P(0) = \bar{s}$. I livelli dello spettro possono sovrapporsi variando un solo parametro libero di H . Intuitivamente questo accade perché gli autostati localizzati in punti distanti non risentono della presenza l'uno dell'altro e possono avere livelli quasi degeneri, come avverrebbe per una collezione di sistemi isolati. Lo stesso comportamento Poissoniano è stato osservato e congetturato per i sistemi con una controparte classica integrabile. Poiché in genere la localizzazione è la fase in cui il disordine è maggiore e i sistemi MBL sono in un qualche senso integrabili, associamo la distribuzione $P_P(s)$ alla fase MBL.

Gli studi numerici sulla localizzazione a molti corpi hanno effettivamente confermato che, per modelli di spin-1/2 e in quelli fermionici [86][52][66][77], è effettivamente possibile identificare entrambi i comportamenti. Nella fase MBL la statistica degli spazamenti adiacenti segue $P_P(s)$ mentre nella fase delocalizzata o termalizzante la statistica ha l'andamento $P_{GOE}(s)$. Nel Capitolo 3 studieremo cosa succede alla statistica dei livelli nel caso bosonico.

Appendice B

Entropia di entanglement: legge del volume e legge dell'area

In meccanica quantistica si usa la parola entanglement per definire le correlazioni all'interno di un sistema che non hanno una controparte classica [87]. Vogliamo studiare l'entanglement nei sistemi MBL e in quelli termalizzanti. Iniziamo chiarendo meglio il significato della parola entanglement.

L'entanglement compare in sistemi con più componenti, quindi è opportuno introdurre il formalismo di sistemi composti. Per introdurre il concetto ci concentriamo sul caso di sistemi bipartiti ma si può generalizzare a sistemi multipartiti. Consideriamo il caso di un sistema AB composto da due sottosistemi A e B distinti. Per concretezza possiamo pensare ad un sistema di spin su reticolo dove A e B sono una partizione dell'insieme di tutti gli spin. A ciascuno dei sottosistemi è associato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$. Lo spazio di Hilbert totale è dato dal prodotto tensore $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ generato dai vettori $|i_A j_B\rangle = |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$ dove $\{|i_A\rangle\}, \{|j_B\rangle\}$ sono rispettivamente basi ortonormali per \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B . Se A e B sono un insieme di siti del sistema possiamo pensare agli indici i e j come collezioni di numeri quantici dei gradi libertà rispettivamente in A e in B . Indichiamo con N_A e N_B le rispettive dimensioni di \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , la dimensione di \mathcal{H} risulta essere $N_{AB} = N_A N_B$. Senza perdita di generalità supponiamo che valga sempre $N_A \leq N_B$. Ipotizziamo che il sistema si trova in uno stato $|\psi\rangle$ ben definito, il valore di aspettazione

di un osservabile O_{AB} vale

$$\langle \psi | O_{AB} | \psi \rangle = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi| O_{AB}) = \text{Tr}(\rho O_{AB}) \quad (\text{B.1})$$

dove per descrivere lo stato del sistema abbiamo usato la matrice densità del sistema $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, che permette di determinare i valori di aspettazione delle osservabili del sistema. Sviluppando l'eq B.1 nella base dei prodotti tensori otteniamo

$$\langle O_{AB} \rangle = \sum_{i_A, i'_B, j_B, j'_B} \langle i_A j_B | O_{AB} | i'_A j'_B \rangle \langle i'_A j'_B | \rho | i_A j_B \rangle. \quad (\text{B.2})$$

Vogliamo calcolare il valore di aspettazione di un'osservabile O_A del solo sottosistema A . O_A agirà non banalmente sulle componenti con pedice A quindi dall'eq B.2 si ha

$$\langle O_A \rangle = \sum_{i_A, i'_B, j_B, j'_B} \langle i_A | O_A | i'_A \rangle \langle i'_A j'_B | \rho | i_A j_B \rangle \langle j_B | j'_B \rangle \quad (\text{B.3})$$

$$= \sum_{i_A, i'_A, j_B} (\langle i_A | O_A | i'_A \rangle) \langle i'_A j_B | \rho | i_A j_B \rangle \quad (\text{B.4})$$

$$= \sum_{i, i'} (\langle i_A | O_A | i'_A \rangle) \left(\sum_j \langle i'_A j_B | \rho | i_A j_B \rangle \right) = \text{Tr}_A(\rho_A O_A) \quad (\text{B.5})$$

dove Tr_A indica la traccia di operatori sul sottosistema A , ρ_A è un operatore su \mathcal{H}_A definito come

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho \equiv \sum_{i_A, i'_A} \left(\sum_{j_B} \langle i_A j_B | \rho | i'_A j_B \rangle \right) |i_A\rangle \langle i'_A| \quad (\text{B.6})$$

dove è definita la traccia parziale Tr_B su B di un operatore su AB . ρ_A risulta essere un operatore definito positivo e unitario ed è detto matrice densità ridotta su A . Se ρ_A è ancora un proiettore su un certo vettore di A (come avevamo ipotizzato per ρ) si dice che ρ_A è uno stato puro, altrimenti lo stato viene detto misto. Analogamente per un operatore O_B che agisce solo sul sottosistema B si ha

$$\langle O_B \rangle = \text{Tr}_B(\rho_B O_B). \quad (\text{B.7})$$

Le matrici densità ridotte ρ_A, ρ_B permettono di calcolare i valori di aspettazione di tutte le osservabili definite rispettivamente su A e B , quindi rappresentano lo stato dei due sottosistemi. In meccanica classica, se AB è in una configurazione ben definita, questa

informazione è sufficiente per determinare i valori di tutte le osservabili del sistema. In meccanica quantistica questo non è vero perché possono comparire delle correlazioni. Tutte le osservabili possano essere scritte come combinazione lineare di prodotti di osservabili su A e osservabili su B ma in generale si ha

$$\langle O_A O_B \rangle \neq \langle O_A \rangle \langle O_B \rangle . \quad (\text{B.8})$$

Se per due osservabili O_A e O_B vale l'eq B.8 le loro distribuzioni di probabilità sono necessariamente correlate. Queste correlazioni prendono il nome di entanglement, dipendono dallo stato del sistema e possono essere presenti tra gradi di libertà arbitrariamente lontani. In generale, se tra i sottosistemi A e B ci sono correlazioni che non hanno un corrispettivo classico, si dice che nello stato ρ i gradi di libertà di A e di B sono entanglati. Una definizione più generale di entanglement, che tratta stati misti e sistemi multipartiti, si può trovare in [88] ma non è necessaria ai nostri fini. Passiamo ora a discutere la quantificazione dell'entanglement presente in un sistema bipartito AB che sia descrivibile da uno stato puro $|\psi\rangle$. Un approccio più generale alla quantificazione dell'entanglement, che tratta stati misti e sistemi multipartiti, si può trovare in [88] ma non è necessaria ai nostri fini. In un sistema bipartito è sempre possibile trovare due set di N_A vettori $\{|\chi_k\rangle_A\}, \{|\phi_k\rangle_B\}$, rispettivamente ortonormali su A e B , tali che

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N_A} \sqrt{\lambda_k} |\chi_k^A \phi_k^B\rangle \quad (\text{B.9})$$

dove l'insieme dei $\lambda_k > 0$ è indipendente dai vettori scelti. Il numero n_S dei $\lambda_k > 0$ prende il nome di indice di Schmidt. Dalla condizione di normalizzazione $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ otteniamo $\sum_{k=1}^{N_A} \lambda_k = 1$. La decomposizione B.9 è detta decomposizione di Schmidt [89] ed è utile per determinare la presenza di entanglement tra due sottosistemi. Se $n_S = 1$ il sistema si trova in uno stato prodotto e non è entangolato. Se $d \geq 2$ si ha che dati

$$O_A = |\chi_1^A\rangle_A \langle \chi_2^A| \quad O_B = |\phi_1^B\rangle_B \langle \phi_2^B| \quad (\text{B.10})$$

le correlazioni valgono

$$\langle O_A O_B \rangle = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \quad (\text{B.11})$$

$$\langle O_A \rangle \langle O_B \rangle = 0 . \quad (\text{B.12})$$

e lo stato risulta entangolato. Se tutti i coefficienti sono uguali ($n_S = N_A$ e $\lambda_i = \frac{1}{N_A}$) lo stato si dice massimamente entangolato. L'indice di Schmit quindi permette di decidere se lo stato è entangolato o meno ma non è una buona misura dell'entanglement presente nello stato.

Una misura dell'entanglement è una funzione $E(\rho)$ che associa ad ogni stato un numero reale positivo. Condizioni ragionevoli che sono richieste a una misura dell'entanglement $E(\rho)$ sono [88]

P0 $E(\rho) = 0$ se ρ non è entangolato

P1 $E\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \log(2)$ (condizione di normalizzazione)

P2 $E(\rho)$ dipende solo dai coefficienti della decomposizione di Schmidt. Se i coefficienti della decomposizione Schmidt di ρ maggiorizzano quelli di σ allora $E(\rho) < E(\sigma)$

P3 Date due successioni di stati ρ_m, ρ_n si ha

$$|\rho_m - \rho_n| \rightarrow 0 \implies \frac{E(\rho_m) - E(\rho_n)}{1 + \log(MN)} \text{ (continuità)}$$

P4 $E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$ (addittività)

(P0),(P1),(P3) non necessitano di essere discusse. La (P2) deriva dalla richiesta che effettuando operazioni locali sui singoli sottosistemi e operazioni classiche (LOCC) l'entanglement non aumenti. La (P4) esprime il fatto che avendo più copie identiche dello stesso sistema, l'entanglement totale risulti la somma di quelle sui singoli sistemi. L'unica misura di entanglement che soddisfa tutte queste condizioni è data da

$$E_{vN}(\rho) \equiv - \sum_{k=1}^{N_A} \lambda_k \log \lambda_k. \quad (\text{B.13})$$

Utilizzando le eq B.6, B.9 possiamo riscrivere l'eq B.13 come

$$S_{vN}(\rho_A) \equiv - \text{Tr}(\rho_A \log \rho_A) = E_{vN}(\rho). \quad (\text{B.14})$$

S_{vN} , che dipende solo dallo stato di A , è l'entropia di von Neumann del sottosistema A

B.1 Entropia degli autostati

L'entropia di von Neumann ha anche un forte legame con la termodinamica e la meccanica statistica. Il collegamento tra meccanica statistica e termodinamica è data proprio dall'entropia di von Neumann che viene interpretata come l'entropia termodinamica S_{th} . Consideriamo un sottosistema di A che contiene ℓ^d siti del reticolo mentre tutti gli altri sono in B . Sia $\rho_{A,th}(T)$ la matrice di densità che corrisponde all'equilibrio termico di A alla temperatura $T \neq 0$, si ha

$$S_{vN}(\rho_{A,th}(T)) = S_{A,th}(T) \propto \ell^d \quad (\text{B.15})$$

dove l'ultima relazione deriva dall'estensività dell'entropia termodinamica. Tutte le osservabili O_A su A coinvolgono solo un numero finito di gradi di libertà quindi sono locali. Gli elementi di matrice della matrice di densità ridotta ρ_A su A sono valori di aspettazione di operatori locali. Se vale l'ETH possiamo quindi applicarlo a tutti gli elementi di matrice di A . Considerando il limite termodinamico $N_B \rightarrow \infty$, per autostati $|\phi_n\rangle$ di H che soddisfano l'ETH deve valere

$$\text{Tr}_B |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \rho_{A,th}(T) \quad (\text{B.16})$$

dove $\rho_{A,th}(T)$ descrive A all'equilibrio termodinamico e può essere ricavata equivalentemente dall'ensemble canonico o microcanonico. Utilizzando le eq B.16 B.15 otteniamo.

$$S_{vN}(\text{Tr}_B |\phi_n\rangle \langle \phi_n|) \propto \ell^d. \quad (\text{B.17})$$

Il significato dell'eq B.17 è che gli autostati dell'Hamiltoniana seguono una legge del volume per l'entropia di entanglement. Ovvero l'entropia di entanglement associato a un sottosistema A è proporzionale al volume del sottosistema stesso.

Poiché lo stato tipico della shell microcanonica è termico, è interessante confrontare la legge del volume con l'entropia di uno stato tipico della shell. Il calcolo del valore di S_{vN} per uno stato tipico della shell in generale non è possibile. Quello che è calcolabile è il valore di S_{vN} per uno stato tipico dell'intero spazio di Hilbert. La distribuzione di probabilità che consideriamo è quella che deriva dalla restrizione dell'usuale misura di Lebesgue sullo spazio di Hilbert alla sfera unitaria (ogni raggio unitario risulta essere

contato più volte al variare della fase) [90]. Questa è invariante per trasformazioni unitarie, quindi indipendente dalla base scelta.

Scrivendo $|\psi\rangle$ nella base $\{|i_A j_B\rangle\}$ si ha

$$|\psi\rangle = \sum_{i_A, j_B} C_{i_A j_B} |i_A j_B\rangle \quad (\text{B.18})$$

dove C è una matrice $N \times M$ a coefficienti complessi che contiene le ampiezze dello stato. Il vincolo di unitarietà dello stato diventa

$$\text{Tr } C^+ C = \sum_{i_A, j_B} |C_{i_A j_B}|^2 = 1. \quad (\text{B.19})$$

Quindi la distribuzione di probabilità che consideriamo sulle matrici risulta essere

$$P(C) dC \propto \delta(\text{Tr}(C^+ C) - 1) dC. \quad (\text{B.20})$$

La matrice densità ridotta su A in questa base, utilizzando l'eq B.6, diventa $\rho_A = C^+ C$. ρ_A risulta essere una matrice random e la distribuzione di eq B.20. In termini degli autovalori λ_i di ρ_A , la distribuzione di eq B.20 assume la forma

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_A}) d\lambda_1 \dots d\lambda_{N_A} \propto \delta\left(\sum_{i=1}^{N_A} \lambda_i - 1\right) \prod_{1 \leq i < j \leq N_A} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{1 \leq k \leq N_A} (\lambda_k^{N_A - N_B} d\lambda_k) \quad (\text{B.21})$$

La distribuzione data sulle matrici $N_A \times N_A$ in eq B.20 e B.21 si ottiene imponendo il vincolo della δ alla distribuzione di matrici Random di Wishart. La media dell'entropia è data dall'espressione

$$S_{rand} = \int E_{vN}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_A}) P(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_A}) d\lambda_1 \dots d\lambda_{N_A}. \quad (\text{B.22})$$

L'integrale che si ottiene sostituendo eq B.21, B.13 in B.22 è stato calcolato esattamente in [91] e dà il risultato

$$S_{rand} = \sum_{n=N_B}^{N_A N_B} \frac{1}{n} - \frac{N_A - 1}{2N_B} \quad (\text{B.23})$$

dove ricordiamo che è supposto $N_A \leq N_B$. Consideriamo il caso in cui su ogni sito c'è un sistema a κ stati. In questo caso abbiamo $N_A = \kappa^{l^d}$ mentre $N_B = \kappa^{(L-\ell)^d}$. Prendendo

il limite $l \rightarrow \infty$ B.23 diventa

$$S_{rand}(\ell) = \ell^d \log \kappa - \frac{1}{2} \kappa^{-(L-2l)^d} + \mathcal{O}(\kappa^{-L^d}) \quad (\text{B.24})$$

Eq B.24 descrive come l'entropia di uno stato tipico del sistema scala con le dimensioni della partizione considerata. Nella formula è implicito $\ell \leq \frac{L}{2}$ che deriva dalla condizione $N_A \leq N_B$. Il primo termine corrisponde ad una legge del volume per l'entropia come ci aspettavamo dalla termodinamica. Il secondo è un termine correttivo. Nel caso si consideri ℓ costante, nel limite termodinamico $L \rightarrow \infty$, otteniamo che, indipendentemente dal valore di ℓ , la correzione è depressa esponenzialmente di un fattore $e^{-\log(\kappa)L^d}$ e converge rapidamente a 0. Nel caso $\ell = \alpha L$ invece la correzione decresce esponenzialmente di un fattore $e^{-\log \kappa((1-2\alpha)L)^d}$. Per $\alpha < \frac{1}{2}$ la correzione converge a 0 esponenzialmente, con una convergenza sempre più lenta all'aumentare di α , in accordo con il fatto che la convergenza dipende dalle dimensioni relative del sottosistema A e del bagno termico B . Nel caso limite in cui $\alpha = \frac{1}{2}$ la correzione è una costante che vale $\frac{1}{2}$, questa nel limite termodinamico è comunque trascurabile rispetto all'andamento con il volume.

La legge del volume vale quindi in generale per gli stati tipici sistema, e per gli autostati dell'Hamiltoniana che corrispondono a temperature $T \neq 0$. Questo tipicamente non avviene per il ground state (GS) $|\phi_0\rangle$ delle Hamiltoniane locali, dove è molto più comune che l'entropia di entanglement scali con la area della superficie di confine tra le due regioni A e B . Questo comportamento prende il nome di legge dell'area [92][93] ed in d dimensioni implica che per l'entropia si ha

$$S_{vN}(\text{Tr}_B |\phi_0\rangle \langle \phi_0|) \propto \ell^{d-1}. \quad (\text{B.25})$$

A causa dell'eq B.23, la legge dell'area può valere solo per stati $|\phi_0\rangle$ su un insieme che nel limite termodinamico assume misura nulla. In una dimensione la legge dell'area è confermata per sistemi per Hamiltoniane locali con gap, mentre vicino alle transizioni di fase quantistiche (quando il gap si chiude) sono previste correzioni logaritmiche [94]. In questo senso i GS di questi sistemi hanno una struttura atipica. La legge dell'area compare tipicamente per sistemi localizzati di singola particella. Poiché i sistemi MBL non termalizzano anche a temperature finite $T \neq 0$, anche in questi è possibile una violazione della legge del volume per gli autostati del sistema corrispondenti a temperature elevate. Inoltre, poiché la MBL può essere interpretata come una localizzazione nello

spazio di Hilbert, non sorprenderebbe che gli autostati MBL provengano da una zona dello spazio di Hilbert molto limitata. Lo studio dell'entanglement degli autostati MBL di vari sistemi ha rivelato che per questi vale una legge dell'area [\[53\]](#)[\[95\]](#)[\[66\]](#).

Appendice C

Informazione e coerenza nei sistemi FMBL

In questa sezione discutiamo la possibile applicazione dei sistemi FMBL come memorie quantistiche [96][97][60]. L'esistenza degli l -bits suggerisce la possibilità di immagazzinare informazioni nei sistemi FMBL. Supponiamo di avere accoppiato inizialmente il sistema ad un bagno termico di temperatura nota in modo che la sua distribuzione sia termica. Supponendo di poter accedere al singolo l -bit (ovvero trascurando le code esponenziali), prepariamo il sistema in uno stato in cui lo spin i_0 -esimo è in uno stato puro $e^{i\pi\tau^x} |l_{i_0}(0)\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$. Questo può essere ottenuto misurando τ_i^z e preparando il sistema e applicando una rotazione di π attorno all'asse τ_i^y . L' l -bit i_0 -esimo evolve sotto l'azione di un campo magnetico costante \mathcal{B}_i^{eff} generato dagli l -bits (eq 2.36), quindi l'informazione sullo stato iniziale può essere recuperata tramite una procedura di echo-spin. Effettuando una rotazione di π attorno all'asse τ_i^x dopo un tempo t_R l -bit i_0 -esimo ritornerà allo stato iniziale al tempo $2t_R$

$$|l_{i_0}(2t_R)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{B}_{eff}\tau_z t_R\right) e^{-i\pi\tau^x} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{B}_{eff}\tau_z t_R\right) e^{i\pi\tau^x} |l_{i_0}(0)\rangle = |l_{i_0}(0)\rangle. \quad (C.1)$$

Poiché in laboratorio sono accessibili p -bits e non gli l -bits, recuperare l'informazione immagazzinata risulta più complicato. Partendo da un p -bit e applicando lo stesso protocollo si ottiene che lo stato al tempo $2t_R$ non coincide più esattamente con quello iniziale, ma la l'esistenza di una lunghezza di localizzazione finita protegge comunque

parte dell'informazione. In [60] sono infatti stati individuati alcuni operatori, localmente accessibili, il cui valore di aspettazione al tempo iniziale può essere recuperato (con buona approssimazione) con una procedura di echo-spin. Questo suggerisce che l'informazione immagazzinata nei sistemi FMBL sia effettivamente recuperabile.

Appendice D

Calcolo della distribuzione di r

In questa appendice riportiamo il calcolo della distribuzione $P(r)$ del rapporto tra spazamenti adiacenti (eq 3.12) per il caso di statistica dei livelli Poissoniana e GOE. Nel limite termodinamico, gli spazamenti adiacenti possono essere considerati indipendenti, con questa assunzione procediamo al calcolo di $P(r)$ per statistica dei livelli Poissoniana e GOE.

Se a, b sono due variabili aleatorie indipendenti ed identiche distribuite Poissonianamente:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\min(a, b)}{\max(a, b)} = r\right) &= \int \delta\left(r - \frac{\min(a, b)}{\max(a, b)}\right) e^{-a-b} da db \\ &= 2 \int_{a>b} \delta\left(r - \frac{b}{a}\right) e^{-a-b} da db \\ &= 2 \int a e^{-a(r+1)} da \\ &= \Gamma(2) \frac{2}{(r+1)^2} = \frac{2}{(r+1)^2} \end{aligned} \tag{D.1}$$

Mentre se a, b seguono la distribuzione Wigner-Dison le approssimiamo con la Wigner

surmise ottenendo:

$$P\left(\frac{\min(a, b)}{\max(a, b)} = r\right) = \frac{\pi^2}{4} \int ab \delta\left(r - \frac{\min(a, b)}{\max(a, b)}\right) e^{-\frac{\pi}{4}(a^2 - b^2)} da db \quad (D.2)$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \int_{a>b} ab \delta\left(r - \frac{b}{a}\right) e^{-\frac{\pi}{4}(a^2 - b^2)} da db \quad (D.3)$$

$$= \frac{\pi^2 r}{2} \int a^3 e^{-\frac{\pi}{4}(r^2 + 1)a^2} da \quad (D.4)$$

$$= \frac{8r}{(r^2 + 1)^2} \int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{4r}{(r^2 + 1)^2} \quad (D.5)$$

Dalla 3.12, utilizzando D.1 e D.2, si ottiene

$$P_P(r) = \frac{2}{(r + 1)^2} \quad (D.6)$$

$$P_{GOE}(r) \approx \frac{4r}{(r^2 + 1)^2} \quad (D.7)$$

dove $P_{GOE}(r)$ e $P_P(r)$ sono rispettivamente le distribuzioni di r per statistica dei livelli GOE e Poissoniana. La 3.13 mostra che nel limite $r \rightarrow 0$ le due probabilità hanno un andamento alquanto diverso $P_{GOE}(r) \propto r$, $P_P(r) \approx 2$. L'annullarsi di $P_{GOE}(r)$ è diretta conseguenza della repulsione dei livelli che sfavorisce la presenza di piccoli numeratori in 3.12. Nonostante sia qualitativamente corretta la forma di $P_{GOE}(r)$ risulta quantitativamente diversa da quella esatta che può essere meglio approssimata numericamente.

Appendice E

Grafici aggiuntivi relativi allo scaling collapse

Nel Capitolo 3 abbiamo presentato il diagramma di fase di una catena di bosoni fortemente interagenti, descritta dall'Hamiltoniana eq. 3.4. del disordine e il relativo scaling collapse, effettuato con i parametri di scaling ottimali. Nelle Figure E.1,E.2,E.3,E.5 presentiamo il collasso delle curve effettuato tramite l'algoritmo descritto nel Capitolo 3, per determinare i diagrammi di fase del sistema.

I grafici per il caso $U = 2$ mostrano aumentando ϵ il punto critico per cui avviene il collasso delle curve aumenta. Questo andamento si riflette sulla curva di confine tra le due fasi in figura 3.18(a) che risulta crescente. Nei grafici per $U = 10$ questo andamento è rispettato solo a bassi valori di ϵ .

L'andamento dell'esponente critico ν in funzione del di ϵ è stato riportato in figura E.4. questa mostra che durante la transizione $0.75 < \nu < 1.15$, ovvero $\nu = 0.9(2)$.

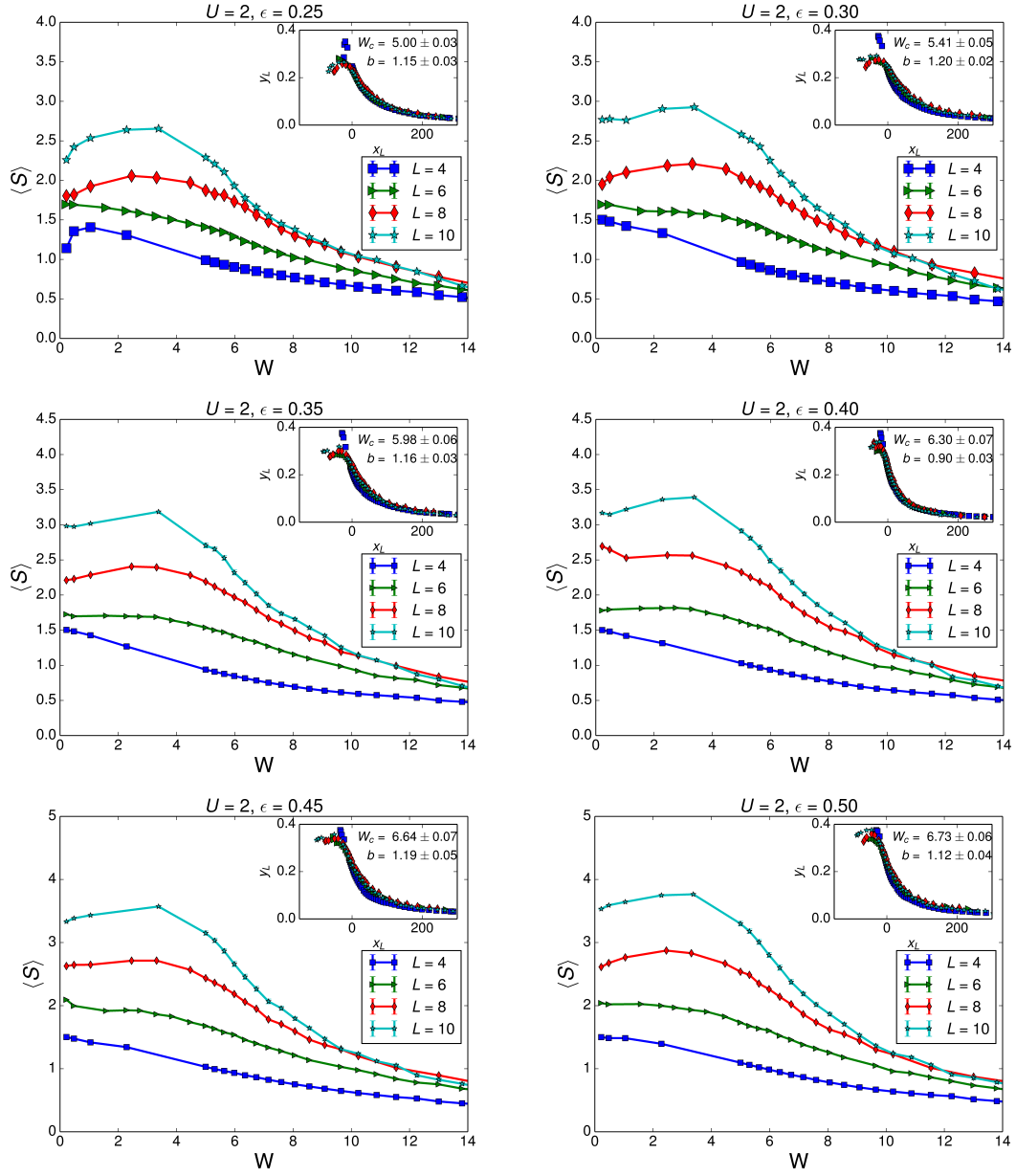


FIGURA E.1: Entropia media della catena di bosoni fortemente interagenti per $U = 2$, $f = 1$ e vari di ϵ da 0.25 a 0.50. L'inserto presenta il collasso delle curve effettuato utilizzando le variabili di scala definite dall'eq. 3.22.

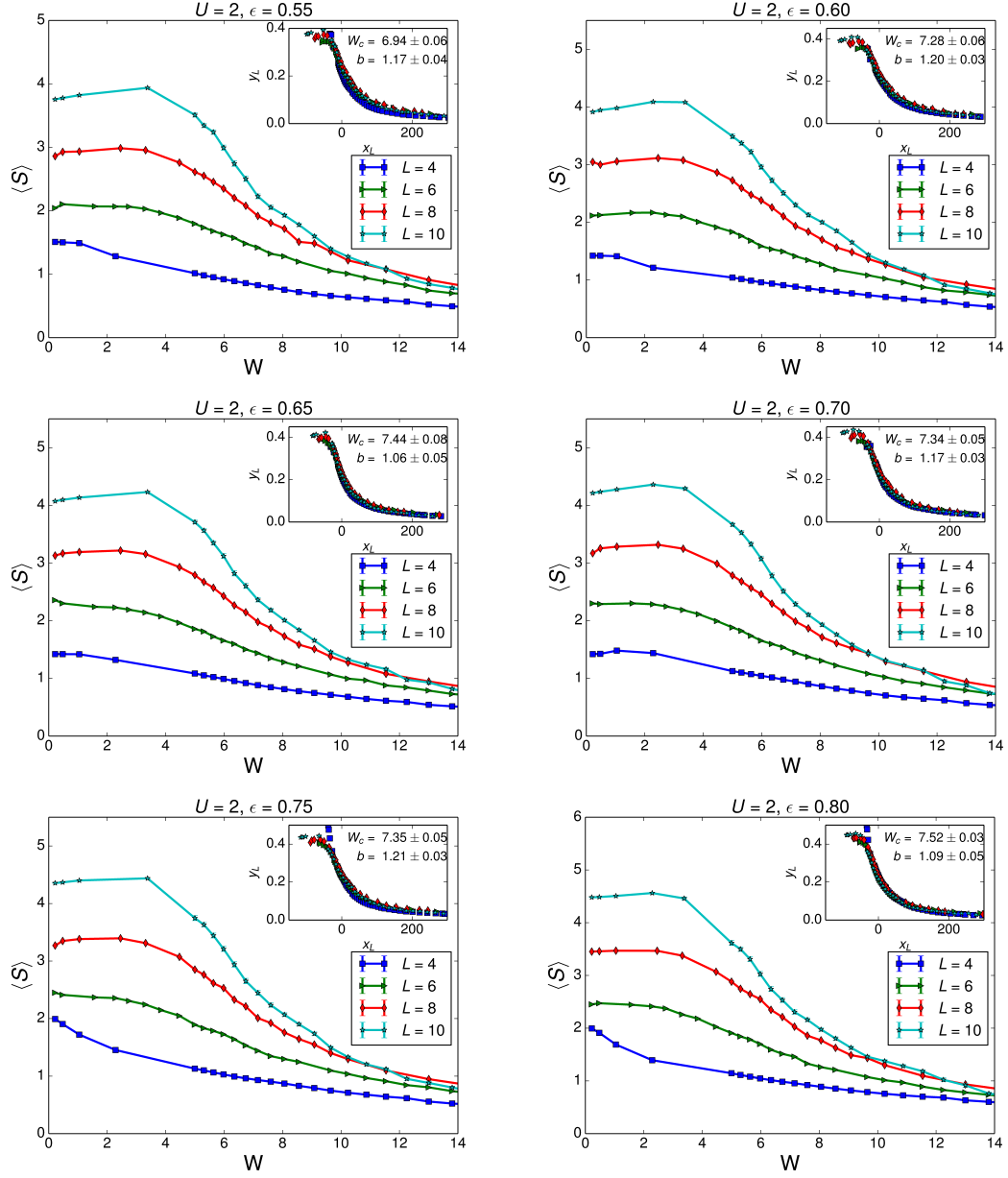


FIGURA E.2: Entropia media della catena di bosoni fortemente interagenti per $U = 2$, $f = 1$ e vari di ϵ da 0.55 a 0.80. L'inserto presenta il collasso delle curve effettuato utilizzando le variabili di scala definite dall'eq. 3.22.

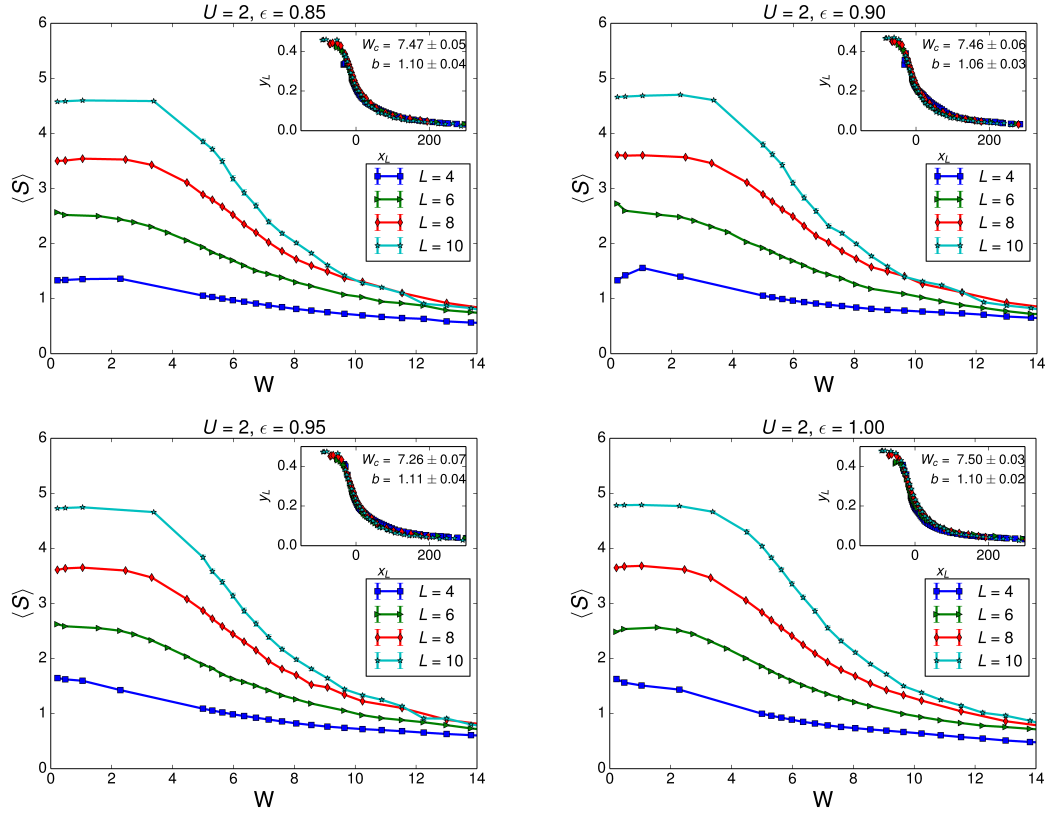


FIGURA E.3: Entropia media della catena di bosoni fortemente interagenti per $U = 2$, $f = 1$ e valori di ϵ da 0.85 a 1. L'inserto presenta il collasso delle curve effettuato utilizzando le variabili di scala definite dall'eq. 3.22.

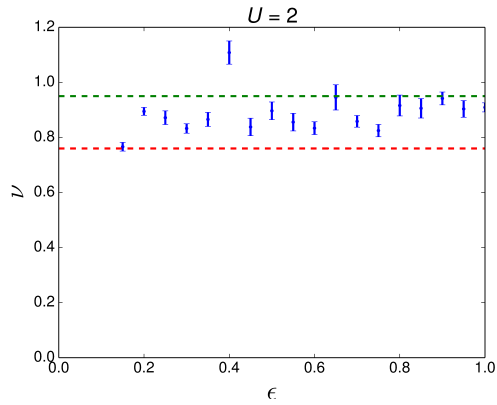


FIGURA E.4: Grafico dei valori dell'esponente critico ν in funzione di ϵ . È fissato $f = 1$.

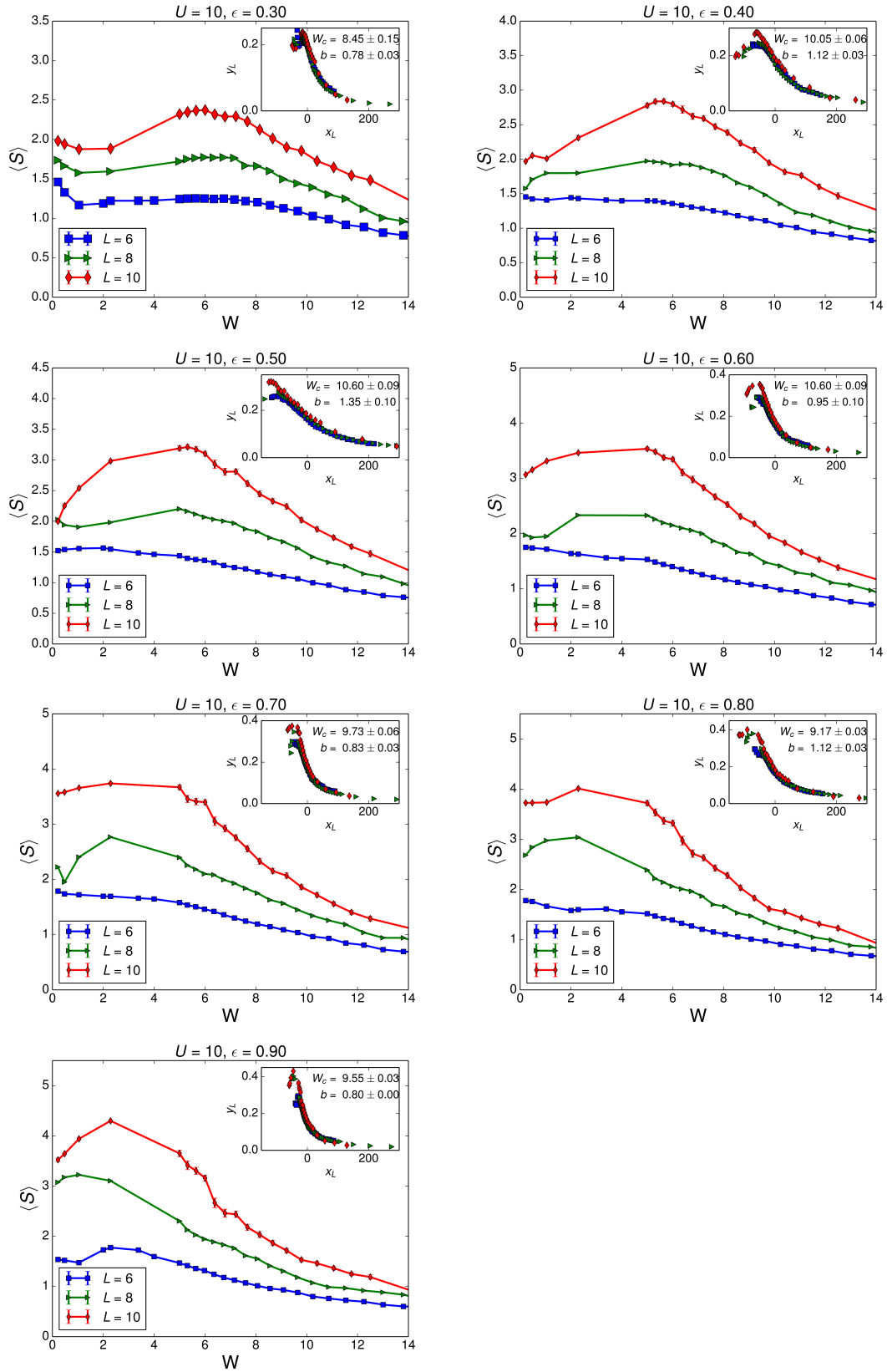


FIGURA E.5: Entropia media della catena di bosoni fortemente interagenti per $U = 10$, $f = 1$ e vari valori di ϵ . L'inserto presenta il collasso delle curve effettuato utilizzando le variabili di scala definite dall'eq. 3.22.

Bibliografia

- [1] M. Kardar, Statistical Physics of Particles, 1 ed. (Cambridge University Press, 2007).
- [2] K. Huang, Statistical mechanics (Wiley, 1987).
- [3] J.C. Maxwell, [Philos. Trans. R. Soc. \(London\)](#) **157** 49 (1867).
- [4] L. Boltzmann, Wien. Ber. **76** 373 (1877).
- [5] A. Fasano and S. Marmi, Analytical Mechanics: An Introduction (Oxford University Press).
- [6] C.C. Moore, [Proc. Natl. Acad. Sci. USA](#) **112** 1907 (2015).
- [7] L.E. Ballentine, Quantum mechanics: a modern development; 2nd ed. (World Scientific, Hackensack, NJ, 2014).
- [8] C. Gogolin and J. Eisert, [arXiv:1503.07538](#) (2015).
- [9] S. Goldstein et al., [Phys. Rev. Lett.](#) **96** 050403 (2006).
- [10] S. Popescu, A.J. Short and A. Winter, [Nat. Phys.](#) **2** 754 (2006).
- [11] M. Rigol, V. Dunjko and M. Olshanii, [Nature](#) **452** 854 (2008).
- [12] J.M. Deutsch, [Phys. Rev. A](#) **43** 2046 (1991).
- [13] M. Srednicki, [Phys. Rev. E](#) **50** 888 (1994).
- [14] U. Schollwöck, [Ann. Phys. \(NY\)](#) **326** 96 (2011).
- [15] M. Rigol and M. Srednicki, [Phys. Rev. Lett.](#) **108** 110601 (2012).
- [16] H. Kim, T.N. Ikeda and D.A. Huse, [Phys. Rev. E](#) **90** 052105 (2014).

-
- [17] J.R. Garrison and T. Grover, [arXiv:1503.00729](#) (2015).
 - [18] M. Troyer et al., [AIP Conf. Proc. **690** 156](#) (2003).
 - [19] W.H. Press et al., Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, 3 ed. (Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007).
 - [20] I. Bloch, J. Dalibard and W. Zwerger, [Rev. Mod. Phys. **80** 885](#) (2008).
 - [21] P. Courteille et al., [Phys. Rev. Lett. **81** 69](#) (1998).
 - [22] M. Greiner et al., [Nature **415** 39](#) (2002).
 - [23] J.S. Caux and J. Mossel, [J. Stat. Mech. **2011** P02023](#) (2011).
 - [24] S. Weigert, [Physica D **56** 107](#) (1992).
 - [25] E. Yuzbashyan and B. Shastry, [J. Stat. Phys. **150** 704](#) (2013).
 - [26] L. Elliott, S. Theodore and M. Daniel, [Ann. Phys. **16** 407](#) (1961).
 - [27] M. Rigol et al., [Phys. Rev. Lett. **98** 050405](#) (2007).
 - [28] A.C. Cassidy, C.W. Clark and M. Rigol, [Phys. Rev. Lett. **106** 140405](#) (2011).
 - [29] P. Reimann, [New J. Phys. **17** 055025](#) (2015).
 - [30] P.W. Anderson, [Phys. Rev. **109** 1492](#) (1958).
 - [31] G. Feher, R.C. Fletcher and E.A. Gere, [Phys. Rev. **100** 1784](#) (1955).
 - [32] R. Nandkishore and D.A. Huse, [Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **6** 15](#) (2015).
 - [33] M. Serbyn, Z. Papić and D.A. Abanin, [Phys. Rev. Lett. **110** 260601](#) (2013).
 - [34] D.A. Huse, R. Nandkishore and V. Oganesyan, [Phys. Rev. B **90** 174202](#) (2014).
 - [35] F. Evers and A.D. Mirlin, [Rev. Mod. Phys. **80** 1355](#) (2008).
 - [36] P.A. Lee and T.V. Ramakrishnan, [Rev. Mod. Phys. **57** 287](#) (1985).
 - [37] G. AU Roati et al., [Nature **453** 895](#) (2008).
 - [38] J. AU Billy et al., [Nature **453** 891](#) (2008).
 - [39] M.A. Paalanen et al., [Phys. Rev. Lett. **48** 1284](#) (1982).

-
- [40] G. Grosso and G. Parravicini, Solid State Physics (Elsevier Science, 2013).
- [41] R. Abou-Chacra, D.J. Thouless and P.W. Anderson, *J. Phys. C* **6** 1734 (1973).
- [42] N.F. Mott, *Philos. Mag.* **17** 1259 (1968).
- [43] A. Miller and E. Abrahams, *Phys. Rev.* **120** 745 (1960).
- [44] R.M. Rubinger et al., *Braz. J. Phys.* **36** 252 (2006).
- [45] W. De Roeck and F. Huveneers, *Commun. Math. Phys.* **332** 1017 (2014).
- [46] D.M. Basko, I.L. Aleiner and B.L. Altshuler, [eprint arXiv:cond-mat/0602510](#) (2006).
- [47] B. Bauer and C. Nayak, *J. Stat. Phys.* **2013** P09005 (2013).
- [48] D. Basko, I. Aleiner and B. Altshuler, *Ann. Phys.* **321** 1126 (2006).
- [49] R. Vosk and E. Altman, *Phys. Rev. Lett.* **110** 067204 (2013).
- [50] J.Z. Imbrie, [arXiv:1403.7837](#) (2014).
- [51] J.H. Bardarson, F. Pollmann and J.E. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **109** 017202 (2012).
- [52] V. Oganesyan and D.A. Huse, *Phys. Rev. B* **75** 155111 (2007).
- [53] J.A. Kjäll, J.H. Bardarson and F. Pollmann, *Phys. Rev. Lett.* **113** 107204 (2014).
- [54] T. Kinoshita, T. Wenger and D.S. Weiss, *Nature* **440** 900 (2006).
- [55] G. Modugno, *Rep. Prog. Phys.* **73** 102401 (2010).
- [56] M. Schreiber et al., *Science* **349** 842 (2015).
- [57] S. Iyer et al., *Phys. Rev. B* **87** 134202 (2013).
- [58] R. Vosk, D.A. Huse and E. Altman, *Phys. Rev. X* **5** 031032 (2015).
- [59] M. Serbyn, Z. Papić and D.A. Abanin, *Phys. Rev. B* **90** 174302 (2014).
- [60] Y. Bahri et al., [arXiv:1307.4092](#) (2013).
- [61] M. Serbyn et al., *Phys. Rev. Lett.* **113** 147204 (2014).
- [62] P. Ponte et al., *Ann. Phys.* **353** 196 (2015).

-
- [63] P. Ponte et al., [Phys. Rev. Lett. **114** 140401 \(2015\)](#).
- [64] T. Grover, [arXiv:1405.1471 \(2014\)](#).
- [65] D.A. Huse, R. Nandkishore and V. Oganesyan, [Phys. Rev. B **90** 174202 \(2014\)](#).
- [66] D.J. Luitz, N. Laflorencie and F. Alet, [Phys. Rev. B **91** 081103 \(2015\)](#).
- [67] A. Chandran et al., [Phys. Rev. B **91** 085425 \(2015\)](#).
- [68] L. Rademaker, [arXiv:1507.07276 \(2015\)](#).
- [69] I.L. Aleiner, B.L. Altshuler and G.V. Shlyapnikov, [Nat. Phys, **6** 900 \(2010\)](#).
- [70] F. Andraschko, T. Enss and J. Sirker, [Phys. Rev. Lett. **113** 217201 \(2014\)](#).
- [71] S. Bera et al., [Phys. Rev. Lett. **115** 046603 \(2015\)](#).
- [72] V.P. Michal, B.L. Altshuler and G.V. Shlyapnikov, [Phys. Rev. Lett. **113** 045304 \(2014\)](#).
- [73] D. Jaksch et al., [Phys. Rev. Lett. **81** 3108 \(1998\)](#).
- [74] M.P.A. Fisher et al., [Phys. Rev. B **40** 546 \(1989\)](#).
- [75] S. Rapsch, U. Schollwöck and W. Zwerger, [EPL \(Europhysics Letters\) **46** 559 \(1999\)](#).
- [76] M.A. Cazalilla et al., [Rev. Mod. Phys. **83** 1405 \(2011\)](#).
- [77] A. Pal and D.A. Huse, [Phys. Rev. B **82** 174411 \(2010\)](#).
- [78] F. James, [Comput. Phys. Commun **79** 111 \(1994\)](#).
- [79] E. Anderson et al. LAPACK Users' guide Vol. 9 (Siam, 1999).
- [80] W.H. Press, FORTRAN Numerical Recipes: Numerical recipes in FORTRAN 90 (Cambridge University Press, 1996).
- [81] J. Cardy, Scaling and Renormalization in Statistical Physics (Cambridge University Press, 1996).
- [82] E.P. Wigner, [SIAM Rev. **9** 1 \(1967\)](#).
- [83] E.P. Wigner, [Proc. Cambridge Philos. Soc. **47** 790 \(1951\)](#).

- [84] O. Bohigas, M.J. Giannoni and C. Schmit, [Phys. Rev. Lett. **52** 1 \(1984\)](#).
- [85] L. Erdős, [Russ. Math Surv **66** 507 \(2011\)](#).
- [86] B. Tang, D. Iyer and M. Rigol, [Phys. Rev. B **91** 161109 \(2015\)](#).
- [87] L. Ballentine, Quantum Mechanics: A Modern Development (World Scientific, 1998).
- [88] R. Horodecki et al., [Rev. Mod. Phys. **81** 865 \(2009\)](#).
- [89] M. Keyl, [Phys. Rep. **369** 431 \(2002\)](#).
- [90] E. Schrödinger, Ann. Phys. (Berlin) **4** 956 (1927).
- [91] S. Sen, [Phys. Rev. Lett. **77** 1 \(1996\)](#).
- [92] M. Srednicki, [Phys. Rev. Lett. **71** 666 \(1993\)](#).
- [93] J. Eisert, M. Cramer and M.B. Plenio, [Rev. Mod. Phys. **82** 277 \(2010\)](#).
- [94] L. Amico et al., [Rev. Mod. Phys. **80** 517 \(2008\)](#).
- [95] A.D. Luca and A. Scardicchio, [Europhys. Lett. **101** 37003 \(2013\)](#).
- [96] E. Altman and R. Vosk, [Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **6** 383 \(2015\)](#).
- [97] M. Serbyn et al., [Phys. Rev. Lett. **113** 147204 \(2014\)](#).

Ringraziamenti

Vedo la mia prima scrittura di un testo scientifico come un passo importante che non avrei portato a termine senza l'aiuto di svariate persone. Per questo, inizio ringraziando il Prof. Fazio e il Dott. Rossini, che mi hanno seguito durante il lavoro di tesi con costanza e pazienza.

Un sentito ringraziamento va anche alla mia famiglia che in tutti questi anni mi ha sostenuto nei momenti difficili e ha gioito assieme a me nei momenti felici. Se questa prima fase del percorso accademico è andato a buon fine lo devo in gran parte a voi Babbo, Mamma, Tina e Vivy.

Ringrazio anche la “famiglia allargata” composta da tutti gli zii, cugini, e amici di famiglia a cui mi sono sempre potuto rivolgere per consigli, aiuto e molto altro.

Concludo ringraziando tutti gli amici che mi hanno accompagnato e sopportato sorridendo per questi cinque anni. Poiché sono un ragazzo fortunato, siete decisamente troppi per essere menzionati tutti. Sperando però che vi ritroviate tutti in almeno una delle cose che hanno reso questi ultimi assolutamente indimenticabili, ringrazio tutti i compagni di studio, corse sulle Piagge, calcetto, Magic, letture di manga, videogiochi, scuola domenicale, grigliate, bevute di tè, bevute di altro, vacanze pazze e discorsi inconcludenti.